

Dados de Identificação	
Professores:	Eduardo Palhares Júnior
Disciplina:	MFIM6 - Matemática Financeira
Tema:	Séries de pagamentos & sistemas de amortização
Turma:	6º semestre - Matutino

Gabarito P2

1 Questão

a Calcule o desconto, utilizando todos métodos apresentados em aula. (todos os cálculos devem ser apresentados, considerando 2 casas decimais)

Comercial simples

$$D_{cs} = 50.000 \times 0,025 \times 6$$

$$D_{cs} = R\$7.500,00$$

$$V_{cs} = 50.000(1 - 0,025 \times 6)$$

$$V_{cs} = R\$42.500,00$$

Comercial composto

$$D_{cc} = 50.000 [1 - (1 - 0,025)^6]$$

$$D_{cc} = R\$7.046,58$$

$$V_{cc} = 50.000(1 - 0,025)^6$$

$$V_{cc} = R\$42.953,42$$

Desconto	Comercial	Racional
Simple	R\$ 7.500,00	R\$ 6.521,74
Composto	R\$ 7.046,58	R\$ 6.885,16

Racional Simples

$$D_{rs} = \frac{50.000 \times 0,025 \times 6}{(1 + 0,025 \times 6)}$$

$$D_{rs} = R\$6.521,74$$

$$V_{rs} = \frac{50.000}{(1 + 0,025 \times 6)}$$

$$V_{rs} = R\$43.478,26$$

Racional Composto

$$D_{rc} = 50.000 [1 - (1 + 0,025)^{-6}]$$

$$D_{rc} = R\$6.885,16$$

$$V_{rc} = \frac{50.000}{(1 + 0,025)^6}$$

$$V_{rc} = R\$43.114,84$$

Valor final	Comercial	Racional
Simple	R\$ 42.500,00	R\$ 43.478,26
Composto	R\$ 42.953,42	R\$ 43.114,84

b Discuta os resultados encontrados, comparando quais os mais vantajosos para cada ponta da operação (credor e devedor).

Podemos notar que o desconto comercial simples é o método que oferece a maior taxa de desconto, trazendo vantagens para o credor e desvantagens para o devedor, já que este receberá um valor menor. Justamente por isso ele é chamado de desconto comercial (bancário), já que traz vantagens para o comerciante (banco).

Já o desconto racional simples é o método que oferece a menor taxa de desconto, trazendo vantagens para o devedor e desvantagens para o credor, de fato sendo mais racional no seu conceito.

Os descontos compostos além de ter um cálculo mais complexo, não são a melhor alternativa para nenhuma das duas pontas, por isso não são muito utilizados.

2 Questão

a Calcule a tabela SAC e apresente os seguintes valores: A (amortização mensal); J (juros totais); \bar{J} (juros médios); \bar{P} (prestação média).

Utilizando uma planilha eletrônica, podemos automatizar o cálculo, a partir do seguinte algoritmo proposto a seguir

A1	B	C	D	E	F	G
2	Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo devedor	Juros
3					R\$ 70.000,00	0,450%
4	1	=F\$3/10	=F3*\$G\$3	=C4+D4	=F3-C4	

Aplicando o algoritmo de recorrência, temos a tabela SAC para 14 meses e taxa de juros de 0,45% ao mês.

Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo devedor
				R\$ 70.000,00
1	R\$ 5.000,00	R\$ 315,00	R\$ 5.315,00	R\$ 65.000,00
2	R\$ 5.000,00	R\$ 292,50	R\$ 5.292,50	R\$ 60.000,00
3	R\$ 5.000,00	R\$ 270,00	R\$ 5.270,00	R\$ 55.000,00
4	R\$ 5.000,00	R\$ 247,50	R\$ 5.247,50	R\$ 50.000,00
5	R\$ 5.000,00	R\$ 225,00	R\$ 5.225,00	R\$ 45.000,00
6	R\$ 5.000,00	R\$ 202,50	R\$ 5.202,50	R\$ 40.000,00
7	R\$ 5.000,00	R\$ 180,00	R\$ 5.180,00	R\$ 35.000,00
8	R\$ 5.000,00	R\$ 157,50	R\$ 5.157,50	R\$ 30.000,00
9	R\$ 5.000,00	R\$ 135,00	R\$ 5.135,00	R\$ 25.000,00
10	R\$ 5.000,00	R\$ 112,50	R\$ 5.112,50	R\$ 20.000,00
11	R\$ 5.000,00	R\$ 90,00	R\$ 5.090,00	R\$ 15.000,00
12	R\$ 5.000,00	R\$ 67,50	R\$ 5.067,50	R\$ 10.000,00
13	R\$ 5.000,00	R\$ 45,00	R\$ 5.045,00	R\$ 5.000,00
14	R\$ 5.000,00	R\$ 22,50	R\$ 5.022,50	R\$ 0,00
Total	R\$ 70.000,00	R\$ 2.362,50	R\$ 72.362,50	SAC

O conceito aplicado no cenário 2 é o mesmo, mas a tabela é muito maior, inviável e desnecessário de apresentar em um documento. Por conta disso, será apresentado sobre o resumo de cada cenário, com as informações reelevantes:

Cenário 1

$$\begin{cases} A_1 = R\$5.000,00 \\ J_1 = R\$2.362,50 \\ \bar{J}_1 = R\$168,75 \\ \bar{P}_1 = R\$5.168,75 \end{cases}$$

Cenário 2

$$\begin{cases} A_2 = R\$1.458,33 \\ J_2 = R\$716.975,00 \\ \bar{J}_2 = R\$2.987,40 \\ \bar{P}_2 = R\$4.445,73 \end{cases}$$

b Calcule a tabela PRICE e apresente os seguintes valores: \bar{A} (amortização média); J (juros totais); \bar{J} (juros médios); P (prestação mensal).

Parcela - termos vencidos Valor presente: $V_p = R\$70.000,00$

Número de parcelas: $n = 14$

Taxa de juros: $i = 0,45$ a.m.

Valor da parcela:

$$P = V_p \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = R\$70.000,00 \frac{(1+0,0045)^{14} \cdot i}{(1+0,0045)^{14} - 1} \therefore P = R\$5.170,39$$

Utilizando uma planilha eletrônica, podemos automatizar o cálculo, a partir do seguinte algoritmo proposto a seguir

A1	B	C	D	E	F	G
2	Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo devedor	Juros
3					R\$ 50.000,00	0,450%
4	1	=E4-D4	=F3*\$G\$3	R\$ 5.124,58	F3-C4	

Aplicando o algoritmo de recorrência, temos a tabela PRICE para 14 meses e taxa de juros de 0,45% ao mês.

Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo devedor
				R\$ 70.000,00
1	R\$ 4.855,39	R\$ 315,00	R\$ 5.170,39	R\$ 65.144,61
2	R\$ 4.877,24	R\$ 293,15	R\$ 5.170,39	R\$ 60.267,37
3	R\$ 4.899,19	R\$ 271,20	R\$ 5.170,39	R\$ 55.368,18
4	R\$ 4.921,23	R\$ 249,16	R\$ 5.170,39	R\$ 50.446,94
5	R\$ 4.943,38	R\$ 227,01	R\$ 5.170,39	R\$ 45.503,56
6	R\$ 4.965,63	R\$ 204,77	R\$ 5.170,39	R\$ 40.537,94
7	R\$ 4.987,97	R\$ 182,42	R\$ 5.170,39	R\$ 35.549,97
8	R\$ 5.010,42	R\$ 159,97	R\$ 5.170,39	R\$ 30.539,55
9	R\$ 5.032,96	R\$ 137,43	R\$ 5.170,39	R\$ 25.506,59
10	R\$ 5.055,61	R\$ 114,78	R\$ 5.170,39	R\$ 20.450,98
11	R\$ 5.078,36	R\$ 92,03	R\$ 5.170,39	R\$ 15.372,61
12	R\$ 5.101,21	R\$ 69,18	R\$ 5.170,39	R\$ 10.271,40
13	R\$ 5.124,17	R\$ 46,22	R\$ 5.170,39	R\$ 5.147,23
14	R\$ 5.147,23	R\$ 23,16	R\$ 5.170,39	-R\$ 0,00
Total	R\$ 70.000,00	R\$ 2.385,48	R\$ 72.385,48	PRICE

Novamente, o conceito aplicado no cenário 2 é o mesmo, mas a tabela é muito maior, inviável e desnecessário de apresentar em um documento. Por conta disso, será apresentado sobre o resumo de cada cenário, com as informações reelevantes:

Cenário 1

Cenário 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_1 = R\$5.000,00 \\ J_1 = R\$2.385,48 \\ \bar{J}_1 = R\$170,39 \\ P1 = R\$5.170,39 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_2 = R\$1.458,33 \\ J_2 = R\$1.103.431,14 \\ \bar{J} = R\$4.597,63 \\ P2 = R\$6.055,96 \end{array} \right.$$

c Combinando os valores dos cenários 1 e 2 entre si, simule todas os cenários possíveis. Utilize a tabela para anotar os valores encontrados.

14 meses		0,45%			1,70%		
		SAC	PRICE	Rel	SAC	PRICE	Rel
R\$70.000,00	Juros total	R\$ 2.362,50	R\$ 2.385,48	0,97%	R\$ 8.925,00	R\$ 9.250,67	3,65%
	Juros médio	R\$ 168,75	R\$ 170,39	0,97%	R\$ 637,50	R\$ 660,76	3,65%
	Prestação	R\$ 5.168,75	R\$ 5.170,39	0,03%	R\$ 5.637,50	R\$ 5.660,76	0,41%
R\$350.000,00	Juros total	R\$ 11.812,50	R\$ 11.927,41	0,97%	R\$ 44.625,00	R\$ 46.253,35	3,65%
	Juro médio	R\$ 843,75	R\$ 851,96	0,97%	R\$ 3.187,50	R\$ 3.303,81	3,65%
	Prestação	R\$ 25.843,75	R\$ 25.851,96	0,03%	R\$ 28.187,50	R\$ 28.303,81	0,41%

20 anos		0,45%			1,70%		
		SAC	PRICE	Rel	SAC	PRICE	Rel
R\$70.000,00	J	R\$ 37.957,50	R\$ 44.618,27	17,55%	R\$ 143.395,00	R\$ 220.686,23	53,90%
	\bar{J}	R\$ 158,16	R\$ 185,91	17,55%	R\$ 597,48	R\$ 919,53	53,90%
	\bar{P}	R\$ 449,82	R\$ 477,58	6,17%	R\$ 889,15	R\$ 1.211,19	36,22%
R\$350.000,00	J	R\$ 189.787,50	R\$ 223.091,34	17,55%	R\$ 716.975,00	R\$ 1.103.431,14	53,90%
	\bar{J}	R\$ 790,78	R\$ 929,55	17,55%	R\$ 2.987,40	R\$ 4.597,63	53,90%
	\bar{P}	R\$ 2.249,11	R\$ 2.387,88	6,17%	R\$ 4.445,73	R\$ 6.055,96	36,22%

d Discuta qual método é mais vantajoso, e qual a influência de cada variável em cada cenário. Apresente suas opiniões e conclusões.

O sistema SAC é sempre mais vantajoso em valores absolutos. No entanto, quando estamos trabalhando em cenários favoráveis, onde as variáveis assumem valores relativamente pequenos, a diferença entre os dois métodos é muito pequena. Como o sistema price trabalha com parcelas fixas, talvez a facilidade na hora de montar o planejamento justifique uma pequena diferença no valor final.

Avaliando a influência de cada variável, podemos destacar que a variável "valor financiado" não causa nenhum impacto relativo na performance do cenário, como pode ser observado na terceira coluna de cada caso. Obviamente que em valores absolutos a diferença será gritante, mas de forma linearmente proporcional ao montante, sem surpresas.

Quando avaliamos a influência da taxa de juros, notamos um parâmetro ligeiramente mais perigoso. As taxas de juros empregadas nesse problema referem-se a cenários bastante ideais, com a taxa de juros i_1 um pouco a baixo da praticada pelo programa minha casa minha vida, representando um rendimento próximo ao Tesouro Selic pré-fixado. Já a taxa de juros i_2 também é bem conservadora e refere-se a taxa de juros da CAIXA ECONOMICA FEDERAL (mês de referência - julho de 2019) através do crédito consignado INSS. Podemos notar pela tabela que a diferença entre eles é bastante significativa, mas apesar de contra-intuitivo, a diferença relativa vai caindo em relação ao tempo. Mesmo assim, dentro de um período que é

culturalmente bastante comum para o brasileiro médio, os juros acumulados são relativamente sempre maiores do que 3 vezes, quando utilizado o sistema PRICE.

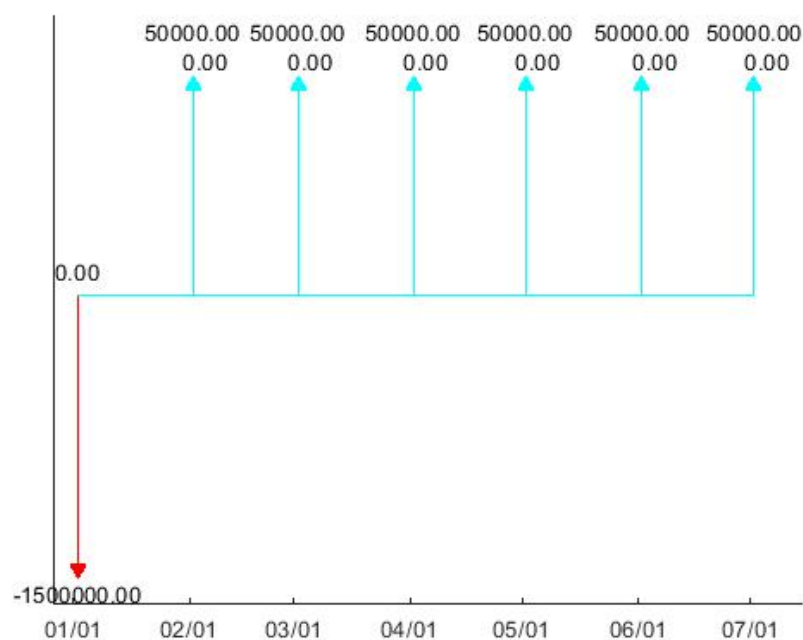
Quando avaliamos a influência do tempo, temos um parâmetro que também tem um impacto muito grande. Claro que é proporcionalmente menor do que a influência da taxa de juros, no entanto, a taxa em geral não tem uma variação absoluta tão grande quanto a variável tempo. De fato, escolhemos o tempo de 20 anos porque é um período culturalmente comum para se financiar um bem nessa faixa de valor, como um imóvel por exemplo. Aqui vale destacar os valores absolutos de juros pagos, que podem assustar em um primeiro momento, mas são completamente coerentes com o que é praticado no nosso dia a dia, com a esmagadora maioria da população.

Em resumo, fica muito claro que um financiamento só faz sentido se existe um real propósito na sua aquisição, para justificar o ônus acumulado. Vale ressaltar que esses cálculos não estão considerando efeitos de inflação e depreciação dos bens, o que torna os cenários ainda mais críticos. Apesar dos altos valores encontrados, não julgo esses valores como abusivos, tendo em vista que o interessado em adquirir deve ter plena ciência do acordo a ser firmado, e aceita de forma tácita as condições que lhe são apresentadas. Constitucionalmente, não se pode alegar desconhecimento da lei, e esse é o preço a ser pago pela ignorância.

Cabe ressaltar que muitas pessoas defendem a idéia do investimento em imóveis, quando sequer tem consciência aproximada da taxa de retorno pontual desse tipo de investimento. O mesmo montante aplicado em praticamente qualquer ativo atrelado a taxa de juros (com baixo risco de crédito, mercado e liquidez) em geral supera a rentabilidade média efetiva de um aluguel pontual, o que torna investimento em imóveis uma solução bastante contra-intuitiva nos dias atuais, mesmo que for para moradia própria. A cultura de se expor a taxas de juros mais elevadas e tempos excessivos não colabora para realizar sonhos, mas sim para aumentar a desigualdade, financiando monopólios financeiros ou um estado corrupto com péssima gestão.

3 Questão

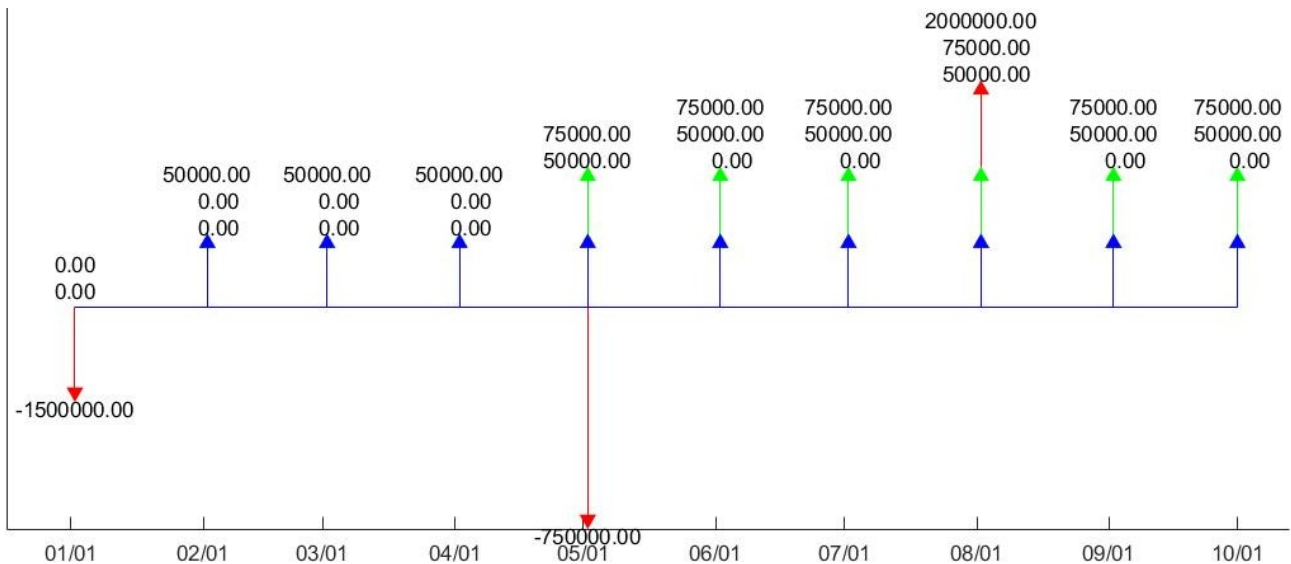
a Calcule o aporte necessário à ser realizado no 6º mês para que o empréstimo seja quitado. (apresentar todos os calculos, considerando 2 casas decimais)



$$\begin{aligned}
VPL &= \frac{R\$50.000,00}{(1+0,005)^1} + \frac{R\$50.000,00}{(1+0,005)^2} + \frac{R\$50.000,00}{(1+0,005)^3} + \frac{R\$50.000,00}{(1+0,005)^4} \\
&\quad + \frac{R\$50.000,00}{(1+0,005)^5} + \frac{R\$50.000,00}{(1+0,005)^6} - R\$1.500.000,00 \\
VPL &= \frac{R\$50.000,00}{1,00500} + \frac{R\$50.000,00}{1,010025} + \frac{R\$50.000,00}{1,015075} + \frac{R\$50.000,00}{1,020150} \\
&\quad + \frac{R\$50.000,00}{1,025251} + \frac{R\$50.000,00}{1,030378} - R\$1.500.000,00 \\
VPL &= R\$49.751,24 + R\$49.503,73 + R\$49.257,44 + R\$49.012,38 \\
&\quad + R\$48.768,53 + R\$48.525,90 - R\$1.500.000,00 \\
VPL &= R\$294.819,22 - R\$1.500.000,00 \\
&\quad \therefore \\
VPL &= -R\$1.205.180,78
\end{aligned}$$

b Suponha que a implantação da 2ª camada foi validada no final do 3º mês, e entrará em operação a partir do mês subsequente, gerando um rendimento adicional mensal de R\$75.000. A partir do 4º mês foi tomado novo empréstimo de R\$750.000 a uma taxa de juros de 0,6% ao mes. Além disso, no 7º mês um investidor externo realizou um aporte de R\$2.000.000. Calcule a TIR considerando um período de 9 meses. (as contas podem ser indicadas esquematicamente e calculadas por algum dispositivo, planilha e/ou algoritmo; importante mostrar o diagrama de fluxo de caixa e o valor final).

Podemos notar que o diagrama de fluxo de caixa agora contém bem mais informação, por isso, devemos tomar cuidado com alguns detalhes:

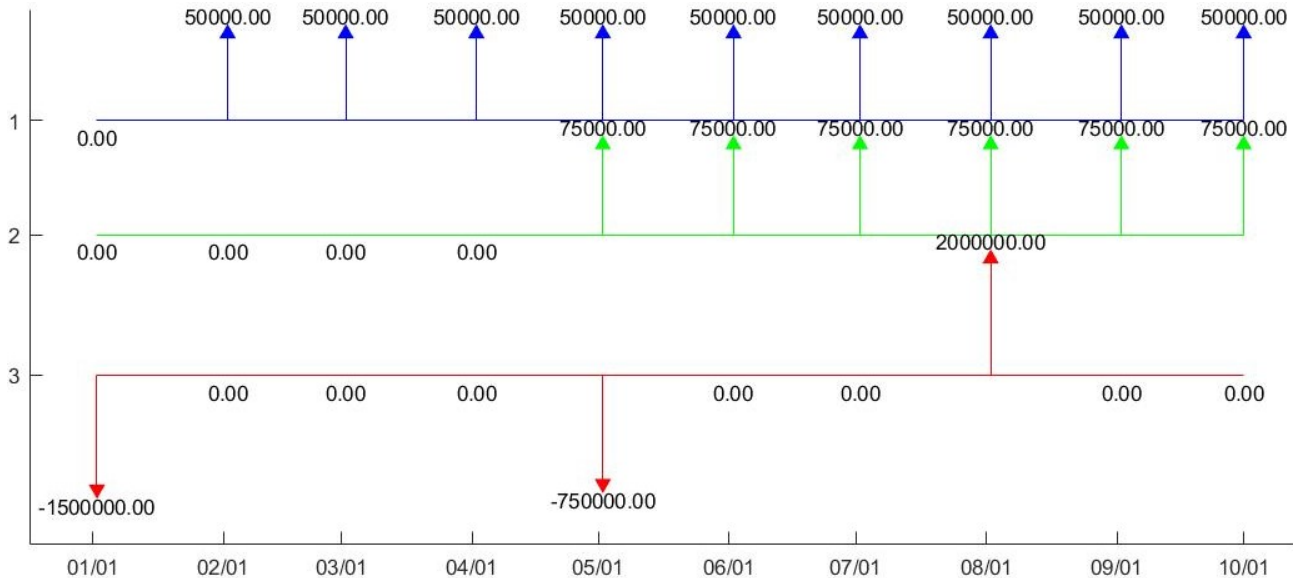


Apesar de todos os dados terem sido colocados juntos, temos que lembrar que estamos trabalhando com 2 taxas de juros distintas. Essas taxas estão relacionadas aos empréstimos de cada camada, mas acabam influenciando na descapitalização tanto dos lucros quanto do investimento externo.

Para facilitar a abordagem, vamos considerar que os rendimentos da primeira camada estão associados aos juros da primeira camada, e de forma análoga, podemos utilizar o mesmo raciocínio para os juros e rendimentos da segunda camada.

Cabe lembrar que o investimento externo também precisa ser descapitalizado e o correto seria fazer uma descapitalização ponderada entre as 2 taxas de juros. Mas para facilitar o raciocínio, vamos utilizar como referência a taxa de juros da segunda camada (visto que foi essa tecnologia que atraiu o investidor).

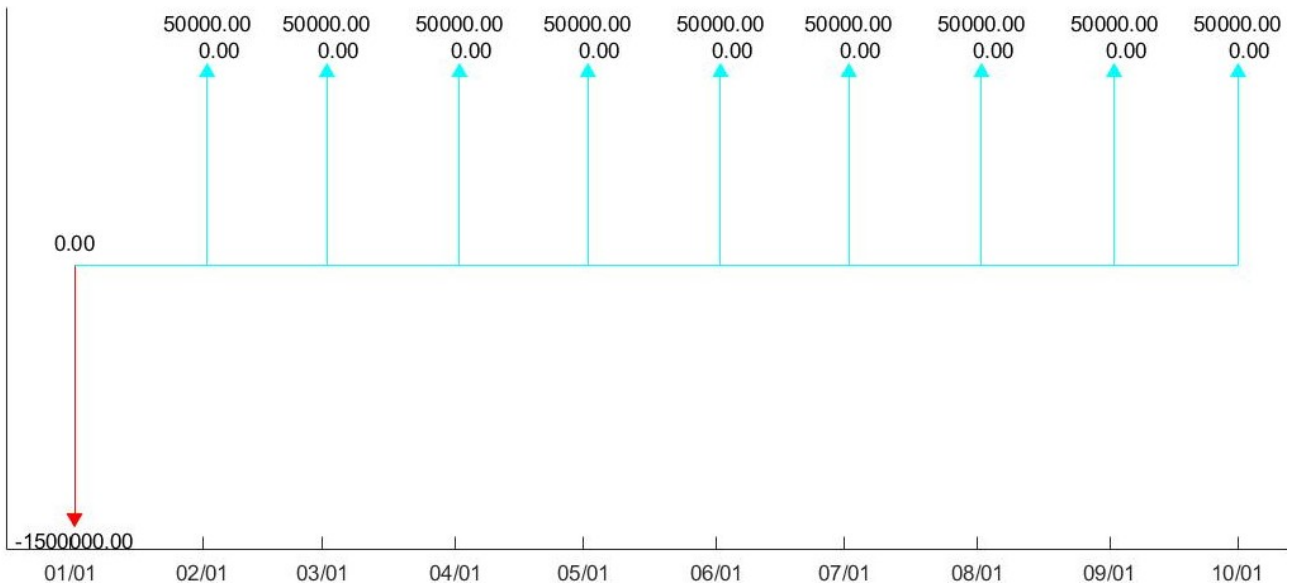
Podemos ainda observar o diagrama dividido em séries separadas por camada e por aportes pontuais (sejam positivos ou negativos).



Caso tivéssemos estimado essa taxa de juros ponderada, esse tipo de diagrama facilitaria a descapitalização pontual. Porém, vale lembrar que se incluímos o efeito do lucro das camadas, essa ponderação evolui com o tempo, tornando a abordagem do problema bem mais complicada.

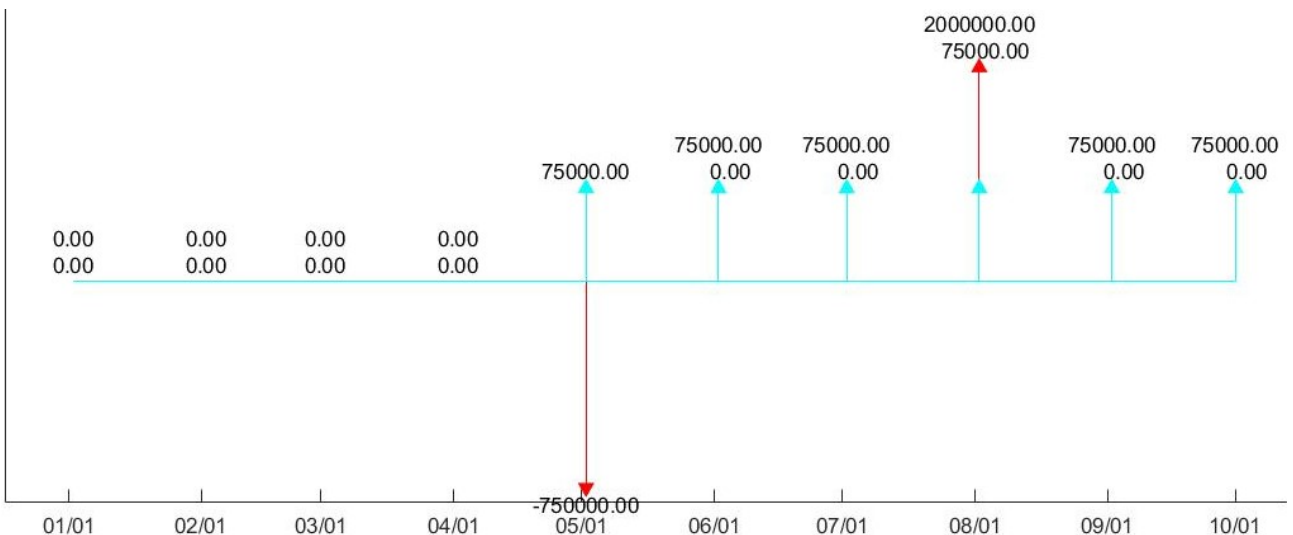
Separando as camadas em 2 diagramas distintos, temos inicialmente o diagrama relativo a primeira camada (como no item anterior), estendido até o 9º mês.

$$\begin{aligned}
 VPL &= \frac{R\$50.000,00}{(1+0,005)^1} + \frac{R\$50.000,00}{(1+0,005)^2} + \frac{R\$50.000,00}{(1+0,005)^3} + \frac{R\$50.000,00}{(1+0,005)^4} \\
 &+ \frac{R\$50.000,00}{(1+0,005)^5} + \frac{R\$50.000,00}{(1+0,005)^6} + \frac{R\$50.000,00}{(1+0,005)^7} + \frac{R\$50.000,00}{(1+0,005)^8} \\
 &+ \frac{R\$50.000,00}{(1+0,005)^9} - R\$1.500.000,00 \\
 VPL &= \frac{R\$50.000,00}{1,00500} + \frac{R\$50.000,00}{1,010025} + \frac{R\$50.000,00}{1,015075} + \frac{R\$50.000,00}{1,020150} \\
 &+ \frac{R\$50.000,00}{1,025251} + \frac{R\$50.000,00}{1,030378} + \frac{R\$50.000,00}{1,035529} + \frac{R\$50.000,00}{1,040707} \\
 &+ \frac{R\$50.000,00}{1,045911} + -R\$1.500.000,00 \\
 VPL &= R\$49.751,24 + R\$49.503,73 + R\$49.257,44 + R\$49.012,38 \\
 &+ R\$48.768,53 + R\$48.525,90 + R\$48.284,48 + R\$48.044,26 \\
 &+ R\$47.805,23 - R\$1.500.000,00 \\
 VPL &= R\$438.953,20 - R\$1.500.000,00 \\
 &\vdots \\
 VPL &= -R\$1.061.046,80
 \end{aligned}$$



Para calcular o fluxo de caixa da segunda camada, utilizaremos como referência o diagrama, mas tomando algumas precauções em relação ao tempo focal de referência:

$$\begin{aligned}
 VPL &= \frac{R\$75.000,00}{(1 + 0,006)^0} + \frac{R\$75.000,00}{(1 + 0,006)^1} + \frac{R\$75.000,00}{(1 + 0,006)^2} + \frac{R\$75.000,00}{(1 + 0,006)^3} \\
 &+ \frac{R\$75.000,00}{(1 + 0,006)^4} + \frac{R\$75.000,00}{(1 + 0,006)^6} - R\$750.000,00 + \frac{R\$2.000.000,00}{(1 + 0,006)^3} \\
 VPL &= R\$75.000,00 + \frac{R\$75.000,00}{1,006} + \frac{R\$75.000,00}{1,012036} + \frac{R\$75.000,00}{1,018108} \\
 &+ \frac{R\$75.000,00}{1,024216} + \frac{R\$75.000,00}{1,030362} - R\$750.000,00 + \frac{R\$2.000.000,00}{1,018108} \\
 VPL &= R\$75.000,00 + R\$74.787,19 + R\$74.574,98 + R\$74.363,37 \\
 &+ R\$74.152,36 + R\$73.941,95 - R\$750.000,00 + R\$1.964.427,72 \\
 VPL &= R\$446.819,85 - R\$750.000,00 + R\$1.964.427,72 \\
 &\therefore \\
 VPL &= R\$1.657.771,10
 \end{aligned}$$



No total, teríamos um ROI de 10 meses, 28 dias, 5 horas, 58 minutos e 25 segundos.

d Um target exigido pelo investidor era de que no 9º mês fosse alcançado um TIR=27,5%. Para atingir essa demanda, poderíamos tentar renegociar as taxas de juros. Considerando a taxa de juros do primeiro empréstimo como sendo fixa (0,5% ao mês), calcule uma estimativa de i para o segundo empréstimo, considerando 2 casas decimais.

Como foi visto no item b), considerando as duas camadas até o 9º mês, encontramos um TIR = 26,52%. Como os empréstimos são fixos, para alcançar um TIR = 27,5%, precisamos recalcular o VPL:

$$0,275 = \frac{VPL}{R\$750.000,00 + R\$1.500.000,00} \Rightarrow VPL = R\$618.750,00$$

O valor relativo a primeira camada está fixo, portanto, precisamos calcular o VPL da segunda camada:

$$VPL = VPL_1 + VPL_2 \Rightarrow VPL_2 = R\$618.750,00 - (-R\$1.205.180,78) = R\$1.823.930,78$$

Aplicado o conceito de VPL, temos:

$$R\$1.823.930,78 = \frac{R\$75.000,00}{(1+i)^0} + \frac{R\$75.000,00}{(1+i)^1} + \frac{R\$75.000,00}{(1+i)^2} + \frac{R\$75.000,00}{(1+i)^3} + \frac{R\$75.000,00}{(1+i)^4} + \frac{R\$75.000,00}{(1+i)^6} - R\$750.000,00 + \frac{R\$2.000.000,00}{(1+i)^3}$$

ou seja, é um problema algebricamente difícil encontrar o valor de i que atende essa condição.

Modelando esse problema em uma planilha eletrônica e utilizando a ferramenta estatística "Attingir Meta", podemos encontrar um valor estimado de $i = 0,002845$.

Note que uma taxa de juros 0,28% ao mês é muito abaixo do praticado no mercado, podendo ser inviável, mas não impossível. Negociando essa taxa com o agente financiador, a meta do investidor é alcançada e o investimento ocorre.