IFSP
Instituto Federal São Paulo
Curso Técnico Integrado em Mecânica

Dados de Identificação	
Professores:	Eduardo Palhares Júnior
Disciplina:	MAT230 - Matemática
Tema:	Números complexos
Turma:	2º ano - Vespertino

Trabalho sobre Números Complexos

1. Considere o número complexo $z = (m^2 - 25) + (m + 5)\,i$ um número imaginário puro. Determine para quais valores de m esse fato acontece e, para esses casos, determine z.

2. Em cada caso, determine os números retais m e n para que a igaldade seja verdadeira:

   a) $m + (n-1)i = -4 + 3i$
   b) $(n-2, m+5) = (3, -2)$
   c) $(m-3) + (n-2)i = 5i$
   d) $(m - n + 1) + (2m + n - 4)i = 0$

3. Resolva em $\mathbb{C}$ as seguintes equações:

   a) $x^2 + 100 = 0$
   b) $-x^2 + 4x - 29 = 0$
   c) $(x^2 + 9)(x^2 - 1) = 0$
   d) $x^3 - 14x^2 + 58x = 0$
   e) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$
   f) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

4. Calcule:

   a) $(4+3i)(-2+2i)$
   b) $(6-3i)(-3+6i)$
   c) $(4+i)(2-i) + 3 - i$
   d) $(-5i)(4-3i)(1+2i)$
   e) $(2-3i)^2$
   f) $(4+4i)^3$
   g) $\left[\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + i\sqrt{3}\right)\right]^2$
   h) $(2+2i)^4$

5. Determine $x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ tal que:

   a) $z_1 = (x_1 + 3i)(1 - 2i)$ seja real puro.
   b) $z_2 = (x_2 + i)(x_2 + 2i)$ seja imaginário puro.

   Calcule quem são z_1 e z_2.

6. Dados os complexos $\begin{cases} z_1 = & -1 & - & 3i \\ z_2 = & & & 2i \\ z_3 = & 1 & - & i \end{cases}$, determine:

   a) $z_1 + \overline{z_2}$
   b) $z_2 \cdot \overline{z_3}$
   c) $\overline{z_1 + z_3}$
   d) $\overline{z_2 \cdot z_3}$

7. Determine, em cada caso, qual o número complexo que garante cada condição respectiva:

a) $2 \cdot \overline{z_1} \cdot i + 3 = 2 \cdot z_1 - \overline{z_1} + 2i$

b) $z_2 \cdot \overline{z_2} = 13 + 6i + \overline{z_2} - z_2$

c) $z_3^2 = \overline{z_3}$

d) $z_4^2 = 2 \cdot \overline{z_4} \cdot i$

8. Expressar os seguintes números complexos na forma algébrica:

a) $z_1 = \dfrac{3 - 7i}{3 + 4i}$

b) $z_2 = \dfrac{4 + i}{3 + 4i}$

c) $z_3 = \dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{1 + i}$

d) $z_4 = \dfrac{3}{2 + 3i} + \dfrac{2i}{3 - 2i}$

e) $z_5 = \dfrac{(2 - i)(4 + 3i)}{1 - 2i}$

f) $z_6 = \dfrac{(1 + i)^{53}}{(1 - i)^{51}}$

9. Determine o módulo de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = -4 + 3i$

b) $z_2 = -2\sqrt{3} - 2i$

c) $z_3 = \dfrac{3i}{1 + i}$

d) $z_4 = (2 - 3i)(4 + 6i)$

e) $z_5 = (\overline{4 - 4i})(1 - i)$

f) $z_6 = \dfrac{5i}{\left(\sqrt{3} - i\right)(3 + 4i)}$

10. Represente geometricamente no plano de Argand-Gauss os seguintes subconjuntos:

a) $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 10\}$

b) $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 4\}$

c) $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \geq 2\}$

d) $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z - 1| = 1\}$

e) $\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{C}; |z + i| = 2\}$

f) $\mathcal{F} = \{z \in \mathbb{C}; |z - 1 + 2i| = 2\}$

11. Determine o argumento principal de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = \sqrt{3} + i$

b) $z_2 = 4\sqrt{3} - 4i$

c) $z_3 = -\dfrac{2}{2} - \dfrac{1}{2}i$

d) $z_4 = -6$

e) $z_5 = \sqrt{6} - \sqrt{2} \cdot i$

f) $z_6 = -\dfrac{\sqrt{2}}{6} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

12. Escreva os seguintes números complexos na forma trigonométrica:

a) $z_1 = -\dfrac{5\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5}{2}i$

b) $z_2 = 2i$

c) $z_3 = -4$

d) $z_4 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

e) $z_5 = -\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i$

f) $z_6 = (1 - i)^2$

13. Obtenha a forma algébrica de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = 4\,(\cos 120° + i \sin 120°)$

b) $z_2 = 6\left(\cos \dfrac{4\pi}{3} + i \sin \dfrac{4\pi}{3}\right)$

c) $z_3 = 3\,(\cos 90° + i \sin 90°)$

d) $z_4 = \cos 210° + i \sin 210°$

e) $z_5 = \cos \dfrac{3\pi}{2} + i \sin \dfrac{3\pi}{2}$

f) $z_6 = 3\,(\cos 315° + i \sin 315°)$

14. Encontra a forma trigonométrica do seguinte número complexo

$$z = i^{21} \cdot i^{22} \cdot i^{23} \cdot i^{24} \cdot i^{25} \cdot i^{26} \cdot i^{27} \cdot i^{28} \cdot i^{29}$$

15. Sejam os números complexos $\begin{cases} z_1 = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{8} + i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right) \\ z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{8} + i\sin\dfrac{11\pi}{8}\right) \end{cases}$, calcule os itens a seguir:

    a) $z_1 \cdot z_2$

    b) $\dfrac{z_1}{z_2}$

    c) $(z_1)^2$

    d) $\dfrac{z_2}{z_1}$

16. Considere os números complexos na forma polar $\begin{cases} z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \\ z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \end{cases}$.

    Sabendo que $\begin{cases} z_1 \cdot z_2 = 80(\cos 16^\circ + i\sin 16^\circ) \\ \dfrac{z_1}{z_2} = 80(\cos 8^\circ + i\sin 8^\circ) \end{cases}$, encontre o valor de ρ_1, ρ_2, θ_1 e θ_2.

17. Calcule:

    a) $\left(-\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)^{10}$

    b) $\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5}i\right)^{8}$

    c) $\left(-4 + 4\sqrt{3} \cdot i\right)^{-6}$

    d) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^{45}$

18. Calcule:

    a) $\sqrt[3]{-2 + 2i\sqrt{3}}$

    b) $\sqrt[4]{-5 - 5i}$

    c) $\sqrt[3]{8\sqrt{3} + 8i}$

    d) $\sqrt[5]{4\sqrt{3} - 4i}$

19. Sabe-se que $z_1 = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$ é uma das raizes quartas de $-8 + 8i\sqrt{3}$. Calcule z_2, z_3 e z_4 na form algébrica.

20. Determine as raízes cúbicas de 1 e representeas no plano cartesiano. Qual é a área do polígono cujos vértices são os afixos das raízes?

21. (UFMG) Seja $z = (x + 1)^3$ um número complexo, em que x é um número real.

    a) Escreva z na forma $a + bi$, em que $a, b \in \mathbb{R}$.

    b) Determine os valores de x para que z seja um imaginário puro.

22. Sejam os números complexos $\begin{cases} z_1 = -2 + i \\ z_2 = 1 + 5i \\ z_3 = 4 + i \end{cases}$, os pontos A, B e C representam as coordenadas das respectivas imagens. Determine a área do triângulo ABC.

23. Seja o números complexo $z = 3 - 4i$, determine:

    a) O inverso de z

    b) O conjugado do inverso de z^2

    c) O inverso de $z \cdot i$

24. Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo que $z = \dfrac{2+i}{3-ai}$ seja imaginário puro e apresente z na forma algébrica.

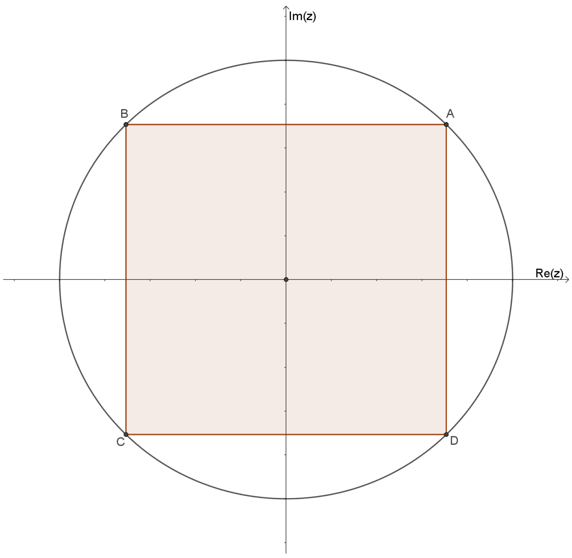
25. Determine $m \in \mathbb{R}$ tal que $z = \dfrac{2+mi}{1-i}$ seja real e apresente z naforma algébrica.

26. (Vunesp-SP) Dada a expressão $\dfrac{5-xi}{5x-9i}$, calcule os valores de $x \in \mathbb{R}$ tal que $A \in \mathbb{R}$.

27. Dados os complexos $\begin{cases} u = (1,2) \\ v = (3,4) \end{cases}$, determine z tal que $\begin{cases} u+v+z \in \mathbb{R} \\ u \cdot v \cdot z \in \mathbb{R} \end{cases}$

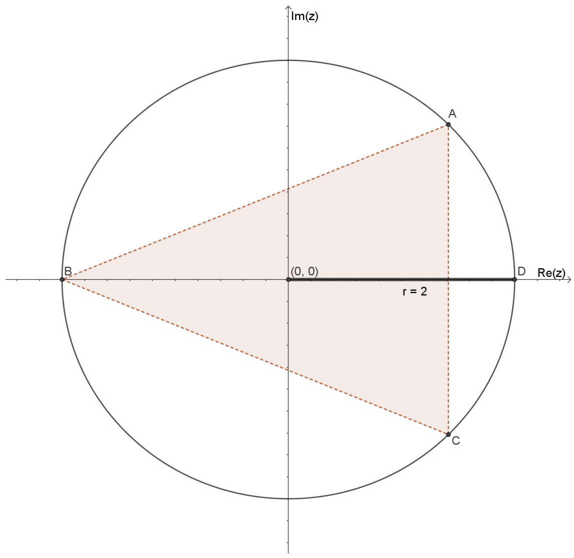
28. Seja o triângulo ABC, onde $C = (0,0)$ e os pontos A e B são representados no plano de Argand-Gauss por $\begin{cases} A: z + \overline{z} = 4 \\ B: z \cdot \overline{z} = 13 \end{cases}$. Calcule a área do triângulo ABC.

29. Sabe-se que a medida do lado do quadrado $ABCD$ é 10. Obtenha a forma polar dos números complexos cujos afixos são os vértices desse quadrado. Expresse as medidas do ângulos em radianos.



30. Seja o número complexo z dado pela expressão $iz + 2\overline{z} + 1 - i = 0$. Determine z^{1004}

31. Sejam os pontos A, B e C os afixos de $\sqrt[3]{-8}$. Obtenha a forma algébica dessas raízes.



32. Escreva os seguintes números complexos na forma algébrica:

    a) $z = \dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^5}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^4}$

    b) $z = \dfrac{(1+i)^{80} - (1-i)^{84}}{i^{96}}$

33. Seja w um número complexo tal que uma de suas raizes cúbicas é $z_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$. Encontre a forma algébrica das raizes quartas de w^{12}.

34. Sejam $x, y \in \mathbb{C}$, escreva as soluções de cada sistema na forma polar:

a) $\begin{cases} x + yi = -1 - 2i \\ 2xi + y = 1 + i \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + yi = 0 \\ xi + y = 3 - 3i\sqrt{3} \end{cases}$

35. Determine o menor número inteiro positivo n que satisfaz cada condição à seguir.

a) $z_1 = \left(\sqrt{3} - i\right)^n$ seja um número real.

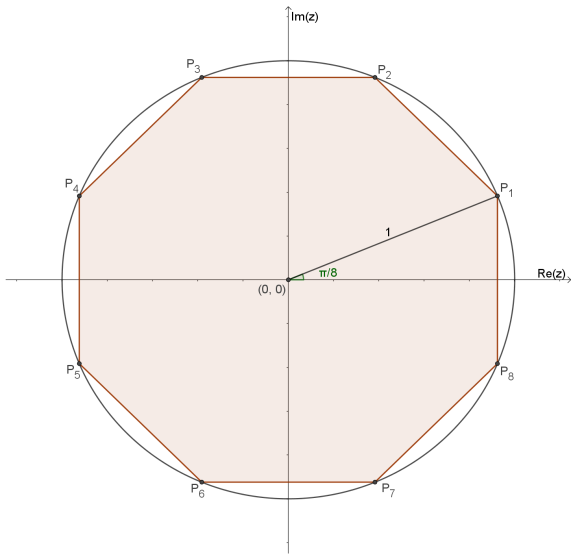
b) $z_2 = \left(-2\sqrt{3} - 2i\right)^n$ seja um número imaginário puro.

Após determinar n para cada caso, calcule z_1 e z_2.

36. Os pontos P_1, P_2, P_3, P_3, P_4, P_6, P_7 e P_8 são as imagens das raízes oitavas de -1.

a) Determine o módulo e o argumento principal dos complexos z_2, z_4, z_5 e z_7, cujas respectivas imagens são P_2, P_4, P_5 e P_7.

b) A área do octógono regular cujos vértices estão assinalados na figura ao lado.



37. (ITA-SP) Calcule o módulo do número complexo $z = \dfrac{1}{1 + i \cdot \cot x}$

38. (Concurso IFSP-2015) Seja $z = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ uma das raízes quintas do número 1, ist é, uma solução da equação $x^5 - 1 = 0$. A soma das décimas potências das cinco raízes dessa equação é:

a) 0   b) 1   c) 5   d) 10   e) 15

39. (Concurso IFSP-2018) Considere o número $z = a + bi$, onde i é a unidade imaginária, e seu conjugado $\overline{z} = a - bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Sobre a equação $z\overline{z}^2 + \dfrac{1}{z^2\overline{z}} = 2$ afirma-se que

a) z é um número imaginário puro

b) z é um número real

c) $ab \neq 0$

d) Ela não possuí solução.

40. (Concurso IFAM-2019) A respeito dos números complexos, analise as afirmativas a seguir:

I) As raízes quadradas de 8 – 6i são z= 3 – i ou z= – 3 + i.

II) As raízes quadradas de 8 – 6i são z= 2 – i ou z= – 2 + i.

III) O número complexo z verifica a equação $iz+2z+1-i = 0$ é o valor de $20z = -2+6i$.

IV) O número complexo z verifica a equação $iz+2z+1-i = 0$ é o valor de $20z = -4+12i$.

V) O número complexo z verifica a equação $iz+2z+1-i = 0$ é o valor de $20z = -3+6i$.

a) apenas I e III são verdadeiras.
b) apenas I e IV são verdadeiras.
c) apenas II e III são verdadeiras.
d) apenas II e IV são verdadeiras.
e) apenas II e V são verdadeiras.

Bons Estudos!!!