Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas	
Campus	Manaus - Distrito Industrial
Curso	Engenharia de Computação
Disciplina	ECP12 - Cálculo Diferencial e Integral I
Docente	Eduardo Palhares Júnior

Lista 3: Integrais

Conceito de integral

1. Considere a função $f(x) = x^2 + 2$ no intervalo $[0, 4]$. Utilize a soma de Riemann para estimar a área sob o gráfico de f através dos retângulos de aproximação:
   (a) Considere 4 retângulos (extremidades esquerdas, direitas e pontos médios).
   (b) Considere 8 retângulos (extremidades esquerdas, direitas e pontos médios).
   (c) Calcule o erro de cada aproximadação comparando com a integral definida.

2. Utilize a definição para calcular a integral das seguintes funções:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

   (a) $\displaystyle\int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$
   (b) $\displaystyle\int_0^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3}$
   (c) $\displaystyle\int_0^x e^t\,dt = e^x - 1$

3. Seja as integrais $\displaystyle\int_0^5 f(x)dx = 10$, $\displaystyle\int_0^5 g(x)dx = -3$ e $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = 4$, utilize as propriedades da integral definida para calcular:
   (a) $\displaystyle\int_0^5 [2f(x) - 3g(x)]\,dx$
   (b) $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx$
   (c) $\displaystyle\int_5^0 g(x)\,dx$
   (d) $\displaystyle\int_{-2}^3 f(x+2)\,dx$

4. Utilize o Teorema Fundamental do Cálculo para avaliar asintegrais definidas à seguir:
   (a) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x^3 - 2x)\,dx$
   (b) $\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx$
   (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^2(t)\,dt$
   (d) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^{99} + \tan x)\,dx$

5. Encontre o valor médio da função $f(x) = x^2 - 1$ no intervalo $[0, 2]$ e determine o ponto c no intervalo onde a função atinge esse valor.

Técnicas de integração

6. Utilize o método da substituição para calcular as integrais à seguir:

(a) $\int (3x^4 - 5x^{\frac{2}{3}} + x^{-2})\,dx$ (d) $\int \frac{(\ln x)^4}{x}\,dx$ (g) $\int \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$

(b) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ (e) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ (h) $\int x\sqrt{x-1}\,dx$

(c) $\int x^2 e^{x^3}\,dx$ (f) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ (i) $\int \frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx$

7. Utilize o método da integração por partes para calcular as integrais à seguir:

(a) $\int xe^{-x}\,dx$ (c) $\int \ln(x)\,dx$ (e) $\int \arctan(x)\,dx$

(b) $\int x^2\sin(x)\,dx$ (d) $\int t^3\ln(t)\,dt$ (f) $\int e^x\cos(x)\,dx$

8. Utilize as identidades trigonométricas para calcular as integrais à seguir:

(a) $\int \sin^3(x)\cos^2(x)\,dx$ (b) $\int \cos^4(x)\,dx$ (c) $\int \sin(3x)\cos(5x)\,dx$

9. Utilize o método da substituição trigonométrica para calcular as integrais à seguir:

(a) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$ (b) $\int \sqrt{x^2-9}\,dx$ (c) $\int \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx$

10. Utilize o método das frações parciais para calcular as integrais à seguir:

(a) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$ (c) $\int \frac{2x+3}{(x-1)^2}\,dx$ (e) $\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$

(b) $\int \frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)}\,dx$ (d) $\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$ (f) $\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx$

Integrais impróprias

11. Analise as integrais impróprias quanto a convergência e calcule seu limite (se existir).

(a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ (d) $\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx$ (g) $\int_0^{\pi/2} \tan(x)\,dx$

(b) $\int_{-\infty}^0 e^{2x}\,dx$ (e) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (h) $\int_0^1 x\ln(x)\,dx$

(c) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$ (f) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$ (i) $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

Áreas e volumes

12. Esboce a região limitada pelas curvas dadas e calcule a sua área. Decida se é mais eficiente integrar em relação a x ou a y.
    (a) Parábolas $y = 12 - x^2$ e $y = x^2 - 6$.
    (b) Parábolas horizontais $x = 2y^2$ e $x = 4 + y^2$.
    (c) Curvas $y = \sin x$ e $y = \cos x$ no intervalo $[0, \pi/2]$.
13. Utilize o método dos Discos ou Arruelas para calcular o volume gerado pela rotação.
    (a) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$ em torno do **eixo x**.
    (b) $y = x^2$ e $y = 2x$ em torno do **eixo x**.
    (c) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$ em torno do **eixo y**.
14. Utilize o método das Cascas Cilíndricas para calcular o volume gerado pela rotação.
    (a) $y = x - x^2$ e $y = 0$ em torno do **eixo y**.
    (b) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ e $x = 4$ em torno do **eixo y**.
    (c) $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$ em torno da reta vertical $x = 2$.
15. Determine o volume do sólido cuja base é a região circular $x^2 + y^2 = 1$ e as seções transversais perpendiculares ao eixo x são quadrados.

Aplicações de integral

16. Calcule o comprimento da curva $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$ no intervalo $[1, 2]$.
17. Encontre a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = x^3$, com $0 \leq x \leq 1$, em torno do **eixo x**.
18. Uma mola tem um comprimento natural de 20 cm, sendo necessária uma força de 25 N para mantê-la esticada num comprimento de 30 cm. Quanto trabalho é realizado para esticar a mola de 20 cm até 25 cm?
19. Um tanque tem a forma de um cone circular invertido com altura de 10 m e raio da base 4 m, e está cheio de água até a altura de 8 m. Calcule o trabalho realizado para bombear toda a água para a borda superior do tanque. (Considere o peso específico da água $\gamma = 9800\, N/m^3$).
20. Encontre as coordenadas do centróide $(\bar{x}, \bar{y})$ da região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ no primeiro quadrante.
21. Uma partícula move-se sobre uma linha reta com velocidade $v(t) = t^2 - 2t - 8$ m/s. Para o intervalo de tempo $1 \leq t \leq 6$:
    (a) Encontre o deslocamento da partícula.
    (b) Encontre a distância total percorrida.

22. Uma barra metálica com 2 metros de comprimento tem sua temperatura T (graus Celsius) descrita pela expressão $T(x) = 40 + 20x(2 - x)$, onde x é a distância medida a partir de uma das extremidades. Calcule a temperatura média da barra.

23. Uma população de bactérias cresce a uma taxa de $\dfrac{dP}{dt} = 1000e^{0.2t}$ bactérias por hora. Se a população inicial era de 500 bactérias, qual será a população após 5 horas?

24. A velocidade do sangue numa artéria de raio R a uma distância r do eixo central é dada por $v(r) = C(R^2 - r^2)$, onde C é uma constante. Calcule o fluxo sanguíneo total através da artéria.
$$F = \int_0^R 2\pi r \cdot v(r)\, dr.$$

25. Um estudante de línguas é capaz de memorizar vocabulário a uma taxa dada por $V'(t) = 15e^{-0.1t}$ palavras por minuto, onde t é o tempo de estudo em minutos. Quantas palavras o estudante consegue memorizar nos primeiros 30 minutos de estudo?

Bons Estudos!!!