

Eduardo Palhares Júnior

Funções de uma Variável

Uma Abordagem Interativa com Python



Manaus, AM
2026

Eduardo Palhares Júnior

Funções de uma Variável

Uma Abordagem Interativa com Python

Material didático desenvolvido para suporte à disciplina ECP12 – Cálculo Diferencial e Integral I do curso de Bacharelado em Engenharia da Computação do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas – Campus Manaus Distrito Industrial.

Manaus, AM
2026

Copyright © 2026 por Eduardo Palhares Júnior.
Obra licenciada sob Creative Commons **CC BY-NC-SA 4.0**
Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 4.0 Internacional

Você é livre para: Compartilhar, copiar e redistribuir o material em qualquer suporte ou formato; Adaptar, remixar e transformar o material.

Sob os termos: Deve dar o crédito apropriado; Não pode usar para fins comerciais; Se alterar o material, deve distribuir sob a mesma licença.

Link da licença: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.en>

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Palhares Júnior, Eduardo
Funções de uma variável [livro eletrônico] : uma
abordagem interativa com Python / Eduardo Palhares
Júnior. -- Manaus, AM : Ed. do Autor, 2026.
PDF

ISBN 978-65-01-98141-3

1. Cálculo diferencial 2. Cálculo integral
3. Matemática 4. Python (Linguagem de programação
para computadores) I. Título.

26-342620.0

CDD-515.84

Índices para catálogo sistemático:

1. Cálculo : Funções de várias variáveis reais :
Matemática 515.84

Camila Aparecida Rodrigues - Bibliotecária CRB -
SP-010133/0

DOI: [10.5281/zenodo.19024595](https://doi.org/10.5281/zenodo.19024595)

Sumário

Revisão de Álgebra e Funções	1
Manipulação Algébrica e Equações	2
Inequações e Intervalos	4
Funções, Domínio e Gráficos	7
Funções Essenciais	12
1 Limites e Continuidade	17
1.1 Intuição e Análise Gráfica de Limites	18
1.2 Cálculo de Limites e Assíntotas	22
1.3 Propriedades de Limites	25
1.4 Continuidade	26
1.5 Teoremas Fundamentais	29
1.6 Revisão	32
2 Derivadas	35
2.1 Conceito de derivada	36
2.2 Regras de derivação	39
2.3 Taxas relacionadas, modelagem e otimização	46
2.4 Análise de funções	60
2.5 Aplicações de derivada	74
3 Integrais	83
3.1 Conceito de integral	84
3.2 Técnicas de integração	93
3.3 Integrais impróprias	104
3.4 Áreas e volumes	107
3.5 Aplicações de integral	117
A Formulário de Referência	127
A.1 Fundamentos de Álgebra e Funções	127
A.2 Identidades Trigonométricas	128
A.3 Derivadas	129
A.4 Integrais	130
B Laboratório Virtual	131
B.1 Orientações para acesso	131
B.2 Anatomia do Notebook	132
B.3 Dinâmica de Laboratório Virtual	133

Revisão de Álgebra e Funções

Sobre este capítulo

Bem-vindo ao curso de Cálculo Diferencial e Integral no domínio real. A experiência mostra que a maior barreira para o sucesso não são os novos conceitos de limites, derivadas ou integrais, mas as lacunas na matemática do ensino básico. Este capítulo de revisão foi desenhado para calibrar as suas ferramentas algébricas antes de iniciarmos o estudo de limites.

Competências e habilidades

- **Fluência Algébrica:** Dominar a simplificação de expressões complexas para garantir que o erro operacional não seja um obstáculo em cálculos avançados.
- **Domínio de Inequações:** Utilizar a notação de intervalos e módulos para descrever conjuntos numéricos e vizinhanças com precisão matemática.
- **Catálogo de Funções:** Reconhecer as famílias de funções elementares e compreender como a variação de seus parâmetros altera sua forma e comportamento.
- **Correlação Gráfica:** Desenvolver a capacidade de antecipar a representação geométrica de uma função a partir de sua estrutura algébrica no plano cartesiano.

***Dica de Estudo:** Utilize o Laboratório Virtual como uma ferramenta de auditoria do seu raciocínio. Após resolver os desafios no papel, utilize os simuladores em Python para observar como a variação dos parâmetros altera instantaneamente o comportamento das funções. Consolidar a visão geométrica junto à algébrica é o caminho mais rápido para a fluência nesta disciplina.*

Laboratório Virtual: Revisão de Álgebra e Funções

Explore o conteúdo desta unidade de forma interativa e dinâmica através de simulações e desafios em Python, utilizando a plataforma do Google Colab. Escaneie o QRcode ou acesse o link para iniciar sua prática.

https://colab.research.google.com/github/professorpalhares/Matematica/blob/main/Funcoes-de-uma-Variavel/Lista_0_revisao.ipynb



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas	
Campus	Manaus - Distrito Industrial
Curso	Bacharelado em Engenharia de Computação
Disciplina	ECP12 - Cálculo Diferencial e Integral I
Docente	Eduardo Palhares Júnior

Lista 0: Revisão de álgebra e funções

Manipulação Algébrica e Equações

- O estudo de polinômios é a base para a manipulação de muitas funções em Cálculo. Sabendo que $x = 1$ é uma das raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$, encontre as outras raízes e fatore $P(x)$ completamente.

Solution: Se $x = 1$ é uma raiz, podemos usar o dispositivo de Briot-Ruffini para dividir $P(x)$ por $(x - 1)$ e encontrar um polinômio de grau menor.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -7 & 14 & -8 \\ & 1 & -6 & 8 & 0 \end{array}$$

O polinômio quociente é $Q(x) = x^2 - 6x + 8$. Agora, basta encontrar as raízes de $Q(x)$ usando a fórmula de Bhaskara ou soma e produto. As raízes de $Q(x)$ são $x = 2$ e $x = 4$. Portanto, as outras raízes de $P(x)$ são 2 e 4.

A forma fatorada completa é o produto dos fatores $(x - r_i)$, onde r_i são as raízes:

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 4)$$

- A simplificação de expressões é fundamental antes de se aplicar conceitos como limites. Simplifique ao máximo a seguinte expressão racional, indicando as restrições sobre a variável x :

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x - 3}$$

Solution: Primeiro, fatoramos cada um dos polinômios da expressão:

$$\begin{aligned} \bullet \quad x^2 - 5x + 6 &= (x - 2)(x - 3) & \bullet \quad x^2 + 3x + 2 &= (x + 1)(x + 2) \\ \bullet \quad x^2 - 4 &= (x - 2)(x + 2) & \bullet \quad x^2 - 2x - 3 &= (x - 3)(x + 1) \end{aligned}$$

Agora, substituímos na expressão original:

$$\frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{(x + 1)(x + 2)}{(x - 3)(x + 1)}$$

Cancelamos os termos comuns, lembrando que para isso x não pode assumir os valores que zeram esses termos.

$$\frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}} \cdot \frac{\cancel{(x+1)}\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x-3)}\cancel{(x+1)}} = 1$$

As restrições são os valores de x que zeram qualquer um dos denominadores originais, que são $x \neq 2$, $x \neq -2$, $x \neq 3$ e $x \neq -1$.

3. Muitas vezes, em engenharia, o interesse não está na solução exata, mas na existência e na natureza dela. Considere a equação $mx^2 + 6x + 3 = 0$, onde m é uma constante real. Sem resolver a equação, determine os valores de m para os quais a equação:
- (a) Possui duas raízes reais e distintas.
 - (b) Possui exatamente uma raiz real.
 - (c) Não possui raízes reais.

Solution: A natureza das raízes de uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ é determinada pelo discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Neste caso, $a = m$, $b = 6$ e $c = 3$.

$$\Delta = 6^2 - 4(m)(3) = 36 - 12m$$

(a) **Duas raízes reais e distintas ($\Delta > 0$):**

$$36 - 12m > 0 \implies 36 > 12m \implies 3 > m$$

Além disso, para ser uma equação quadrática, $m \neq 0$. Portanto, a condição é $m < 3$ e $m \neq 0$.

(b) **Exatamente uma raiz real ($\Delta = 0$ ou $m = 0$):** Se $\Delta = 0 \implies m = 3$. Se $m = 0$, a equação se torna $6x + 3 = 0$, que tem uma única raiz real $x = -1/2$. Portanto, a condição é satisfeita para $m = 3$ ou $m = 0$.

(c) **Nenhuma raiz real ($\Delta < 0$):**

$$36 - 12m < 0 \implies 36 < 12m \implies 3 < m$$

A condição é $m > 3$.

4. A formulação de problemas em termos matemáticos é uma habilidade central na engenharia. O projeto de um data center prevê uma sala de servidores retangular com área de 120 m^2 . Por restrições de cabeamento, o comprimento da sala deve ser 7 metros maior que a sua largura. Determine as dimensões (comprimento e largura) da sala.

Solution: Vamos definir as variáveis:

- w : largura da sala (em metros)
- l : comprimento da sala (em metros)

De acordo com o enunciado, temos duas relações:

1. A área é de 120 m²: $l \cdot w = 120$
2. O comprimento é 7m maior que a largura: $l = w + 7$

Substituindo a equação (2) na equação (1):

$$\begin{aligned}(w + 7) \cdot w &= 120 \\ w^2 + 7w &= 120 \\ &\vdots \\ w^2 + 7w - 120 &= 0\end{aligned}$$

Podemos resolver esta equação quadrática usando a fórmula de Bhaskara.

$$\begin{aligned}w &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(-120)}}{2(1)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 480}}{2} \\ &= \frac{-7 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{-7 \pm 23}{2} \begin{cases} w_1 = \frac{-7 + 23}{2} = \frac{16}{2} & \therefore w_1 = 8 \\ w_2 = \frac{-7 - 23}{2} = \frac{-30}{2} & \therefore w_2 = -15 \end{cases}\end{aligned}$$

Como a largura não pode ser negativa, descartamos w_2 . A largura é $w = 8$ m. O comprimento é $l = w + 7 = 8 + 7 = 15$ m.

As dimensões da sala são 15m de comprimento e 8m de largura.

Inequações e Intervalos

5. A resolução de inequações-quociente é crucial para determinar o domínio de funções e analisar seus sinais. Resolva a seguinte inequação e apresente a solução em notação de intervalo:

$$\frac{x^2 - 3x - 10}{8 - x} \geq 0$$

Solution: Para resolver uma inequação-quociente, estudamos o sinal do numerador e do denominador separadamente.

Numerador (N): $N(x) = x^2 - 3x - 10$. As raízes são $x = -2$ e $x = 5$. Como é uma parábola com concavidade para cima, $N(x) \geq 0$ para $x \leq -2$ ou $x \geq 5$.

Denominador (D): $D(x) = 8 - x$. A raiz é $x = 8$. Como é uma reta decrescente, $D(x) > 0$ para $x < 8$. Note que o denominador não pode ser zero, então $x \neq 8$.

Agora, montamos o quadro de sinais para a fração $N(x)/D(x)$:

Intervalo	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 5)$	5	$(5, 8)$	8	$(8, \infty)$
$N(x)$	+	0	-	0	+	+	+
$D(x)$	+	+	+	+	+	$\neq$	-
$N(x)/D(x)$	+	0	-	0	+	$\neq$	-

Queremos os intervalos onde a expressão é maior ou igual a zero (≥ 0). Pelo quadro, isso ocorre para $x \leq -2$ ou $5 \leq x < 8$.

Solução em notação de intervalo: $S = (-\infty, -2] \cup [5, 8)$.

6. Inequações modulares são frequentes em problemas de engenharia que envolvem tolerâncias e margens de erro. Encontre o conjunto solução da inequação:

$$|2x - 5| > 3$$

Solution: A inequação modular $|A| > B$ (com $B > 0$) é equivalente a $A > B$ ou $A < -B$. Aplicando essa propriedade, temos duas inequações para resolver:

Caso 1: $2x - 5 > 3$

$$2x > 8 \implies x > 4$$

Caso 2: $2x - 5 < -3$

$$2x < 2 \implies x < 1$$

A solução é a união dos dois casos.

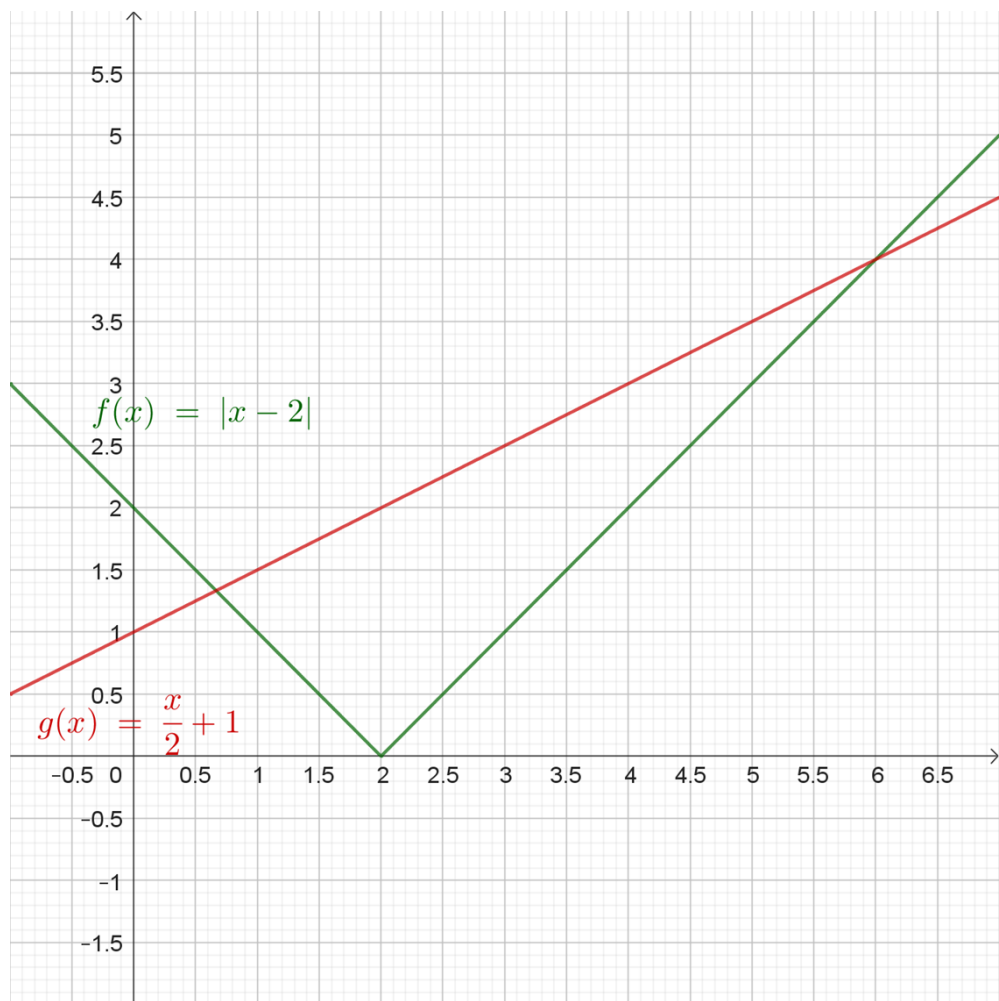
Solução em notação de intervalo: $S = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$.

7. A análise gráfica é uma forma poderosa de interpretar desigualdades. Considere as funções $f(x) = |x - 2|$ e $g(x) = \frac{x}{2} + 1$.

- Esboce o gráfico de ambas as funções no mesmo sistema de coordenadas.
- Usando o seu gráfico, identifique visualmente os intervalos de x para os quais $f(x) < g(x)$.

Solution:

- O gráfico de $f(x) = |x - 2|$ é uma função em "V" com o vértice em $(2, 0)$. O gráfico de $g(x) = \frac{x}{2} + 1$ é uma reta com inclinação $1/2$ que intercepta o eixo y em $y = 1$.



(b) A condição $f(x) < g(x)$ ocorre nos intervalos de x onde o gráfico de $f(x)$ (o "V") está *abaixo* do gráfico de $g(x)$ (a reta). Visualmente, isso acontece entre os dois pontos de interseção dos gráficos. Para encontrar esses pontos, resolvemos $f(x) = g(x)$.

Interseção 1 ($x > 2$): $x - 2 = \frac{x}{2} + 1 \implies \frac{x}{2} = 3 \implies x = 6$.

Interseção 2 ($x < 2$): $-(x - 2) = \frac{x}{2} + 1 \implies -x + 2 = \frac{x}{2} + 1 \implies 1 = \frac{3x}{2} \implies x = \frac{2}{3}$.

Portanto, a reta está acima do "V" entre $x = 2/3$ e $x = 6$.

Solução em notação de intervalo: $S = (2/3, 6)$.

8. O domínio de uma função é o conjunto de todos os valores de entrada para os quais a função produz uma saída real. Em engenharia, o domínio define as condições operacionais seguras de um sistema. Determine o domínio da função:

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$$

Apresente a resposta em notação de intervalo.

Solution: A função raiz quadrada, $\sqrt{A}$, só está definida no conjunto dos números reais se o seu argumento A for não-negativo, ou seja, $A \geq 0$. Para a função $h(x)$, o argumento é $A = x^2 - 4x - 5$. Portanto, a condição para que $h(x)$ seja real é:

$$x^2 - 4x - 5 \geq 0$$

Esta é uma inequação quadrática. Primeiro, encontramos as raízes da equação $x^2 - 4x - 5 = 0$. As raízes são $x = -1$ e $x = 5$. A função $A(x) = x^2 - 4x - 5$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima. Portanto, ela é positiva ou nula "para fora" de suas raízes.

Conclusão: A inequação $x^2 - 4x - 5 \geq 0$ é satisfeita quando $x \leq -1$ ou $x \geq 5$.

Domínio em notação de intervalo: $D(h) = (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$.

Funções, Domínio e Gráficos

9. A composição de funções é uma operação fundamental para construir funções mais complexas, e sua compreensão é essencial para a Regra da Cadeia em derivação. Dadas as funções $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = x^2 - 1$, determine:
- A expressão para a função composta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ e seu respectivo domínio.
 - O valor de $(g \circ f)(15)$.

Solution:

- (a) Para encontrar $f(g(x))$, substituímos a expressão de $g(x)$ dentro de $f(x)$:

$$(f \circ g)(x) = f(x^2 - 1) = \sqrt{(x^2 - 1) + 1} = \sqrt{x^2} = |x|$$

O domínio da função composta é o conjunto de x tal que x está no domínio de g e $g(x)$ está no domínio de f . O domínio de $g(x)$ é $\mathbb{R}$. O domínio de $f(x)$ é $x \geq -1$. Portanto, precisamos que $g(x) \geq -1$, ou seja, $x^2 - 1 \geq -1$, o que implica $x^2 \geq 0$. Isso é verdade para todos os números reais.

Resposta: $(f \circ g)(x) = |x|$, com domínio $D = \mathbb{R}$.

- (b) Para calcular $(g \circ f)(15) = g(f(15))$, primeiro calculamos $f(15)$:

$$f(15) = \sqrt{15+1} = \sqrt{16} = 4$$

Agora, aplicamos g a este resultado:

$$g(4) = 4^2 - 1 = 16 - 1 = 15$$

Resposta: $(g \circ f)(15) = 15$.

10. A função inversa "desfaz" o que a função original faz, um conceito importante em logaritmos, exponenciais e funções trigonométricas inversas. Determine a função inversa $f^{-1}(x)$ da função $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$.

Solution: Para calcular a função inversa, trocamos x por y e isolamos o novo y .

$$y = \frac{2x-1}{x+3} \implies x = \frac{2y-1}{y+3}$$

Agora, isolamos y :

Resposta: A função inversa é $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2-x}$.

$$x(y+3) = 2y-1$$

$$xy + 3x = 2y - 1$$

$$xy - 2y = -3x - 1$$

$$y(x-2) = -3x-1$$

$$y = \frac{-3x-1}{x-2}$$

11. A análise de simetria de uma função pode simplificar cálculos, especialmente em integrais definidas. Determine se as seguintes funções são pares, ímpares ou nenhuma das duas. Justifique sua resposta algebricamente.

(a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$

(b) $g(x) = \frac{\sin(x)}{x^3}$

(c) $h(x) = x^3 - 2x^2$

Solution: Lembramos que uma função f é par se $f(-x) = f(x)$ e ímpar se $f(-x) = -f(x)$ para todo x no domínio.

(a) Calculamos $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 5 = x^4 - 3x^2 + 5 = f(x) \text{ (função par)}$$

(b) Calculamos $g(-x)$, lembrando que $\sin(-x) = -\sin(x)$:

$$g(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)^3} = \frac{-\sin(x)}{-x^3} = \frac{\sin(x)}{x^3} = g(x) \text{ (função par)}$$

(c) Calculamos $h(-x)$:

$$h(-x) = (-x)^3 - 2(-x)^2 = -x^3 - 2x^2$$

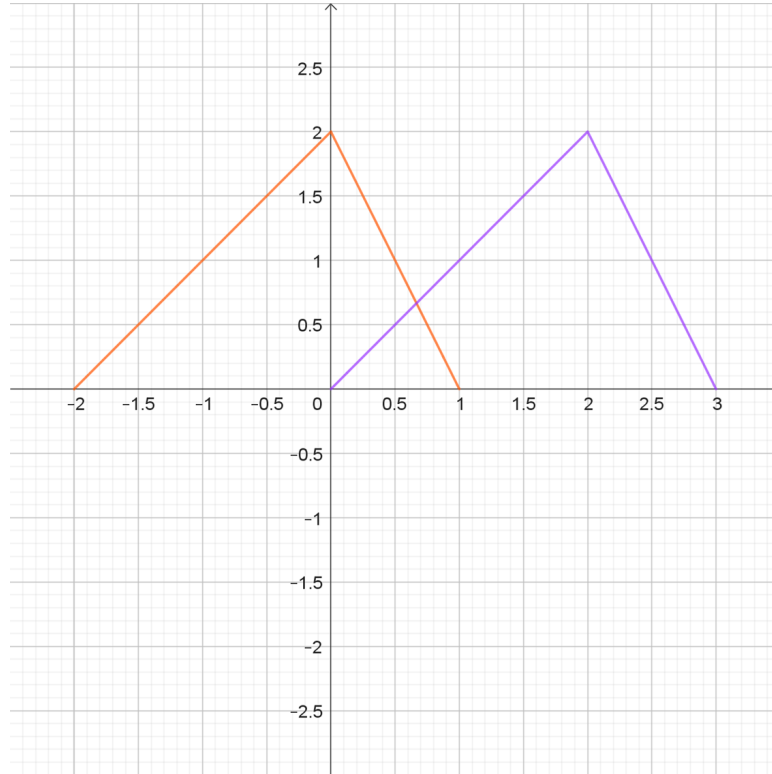
Aqui, $h(-x) \neq h(x)$ e $h(-x) \neq -h(x) = -x^3 + 2x^2$. Portanto, a função **não é par nem ímpar**.

12. Compreender transformações de gráficos permite esboçar funções complexas a partir de funções mais simples. O gráfico da função $f(x)$ é dado abaixo. Esboce o gráfico da função transformada $g(x) = -f(x-2) + 1$.

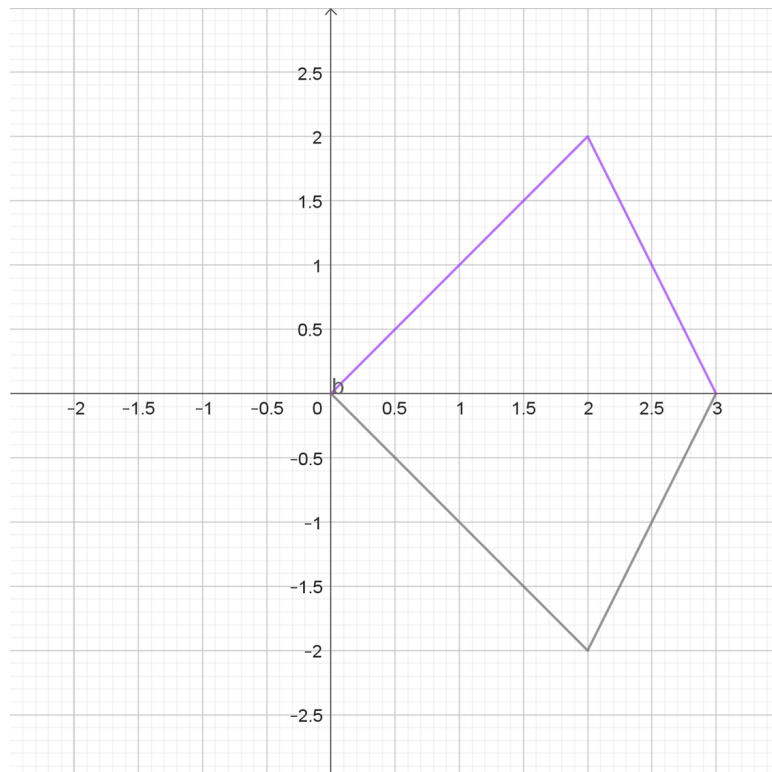
$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ -2x+2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Solution: A transformação $g(x) = -f(x - 2) + 1$ pode ser entendida em três passos, a partir do gráfico de $f(x)$:

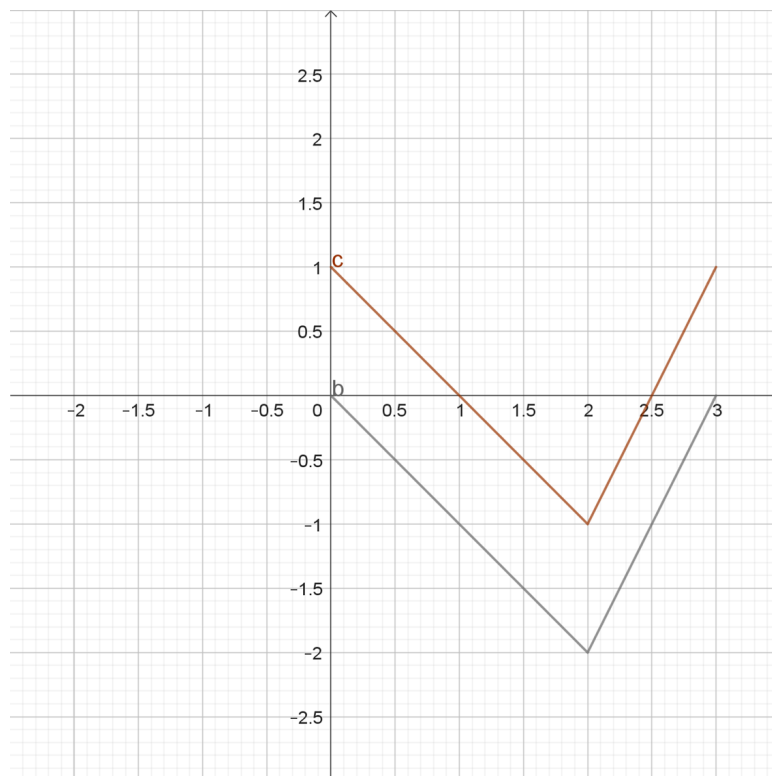
1. $f(x - 2)$: Translação do gráfico original **2 unidades para a direita**.



2. $-f(x - 2)$: Reflexão do gráfico transladado em torno do **eixo x**.



3. $-f(x - 2) + 1$: Translação do gráfico refletido 1 unidade para cima.



Aplicando essa sequência de transformações ao gráfico dado, obtemos o esboço do gráfico de $g(x)$.

13. Funções definidas por partes são excelentes para modelar situações que mudam de comportamento. Uma empresa de telefonia cobra uma assinatura mensal de R\$ 40,00 que dá direito a 200 minutos de ligação. Se o cliente exceder os 200 minutos, cada minuto adicional custa R\$ 0,30.

- Escreva uma função $C(m)$ que represente o custo mensal em função do número de minutos m utilizados.
- Calcule o custo para um cliente que utilizou 350 minutos em um mês.

Solution:

(a) A função tem dois comportamentos diferentes, um para até 200 minutos e outro para mais de 200 minutos.

- Se $0 \leq m \leq 200$, o custo é fixo: $C(m) = 40$.
- Se $m > 200$, o custo é o valor fixo mais o custo dos minutos excedentes. O número de minutos excedentes é $(m - 200)$. O custo adicional é $0,30 \cdot (m - 200)$. Portanto, o custo total é $C(m) = 40 + 0,30(m - 200)$.

Juntando as partes, a função é:

$$C(m) = \begin{cases} 40, & \text{se } 0 \leq m \leq 200 \\ 40 + 0,30(m - 200), & \text{se } m > 200 \end{cases}$$

- (b) Para calcular o custo de 350 minutos, usamos a segunda parte da função, pois $350 > 200$.

$$C(350) = 40 + 0,30(350 - 200) = 40 + 0,30(150) = 40 + 45 = 85$$

Resposta: O custo para 350 minutos é de R\$ 85,00.

14. Em projetos de engenharia, é comum expressar uma quantidade em função de outra para fins de otimização. Um fazendeiro quer construir um cercado retangular e dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados. Ele dispõe de 600 metros de cerca no total.
- (a) Expresse a área total A do cercado como uma função de uma de suas dimensões (por exemplo, a largura x).
- (b) Determine o domínio da função Área no contexto deste problema.

Solution:

- (a) Vamos definir as dimensões do cercado. Seja x a largura e y o comprimento. A cerca interna será paralela ao lado de comprimento y .

O comprimento total da cerca usada é a soma do perímetro mais a cerca interna.

$$\text{Cerca Total} = 2x + 2y + x = 3x + 2y$$

Sabemos que o total de cerca disponível é 600 metros:

$$3x + 2y = 600$$

Podemos isolar y em função de x :

$$2y = 600 - 3x \implies y = 300 - \frac{3}{2}x$$

A área do cercado é $A = x \cdot y$. Substituindo a expressão de y :

$$A(x) = x \left(300 - \frac{3}{2}x \right) = 300x - \frac{3}{2}x^2$$

Resposta: A área em função da largura x é $A(x) = 300x - \frac{3}{2}x^2$.

- (b) O domínio da função são os valores possíveis para x . Como x é uma dimensão, deve ser positivo: $x > 0$. Além disso, a outra dimensão, y , também deve ser positiva.

$$y > 0 \implies 300 - \frac{3}{2}x > 0 \implies 300 > \frac{3}{2}x \implies 600 > 3x \implies 200 > x$$

Portanto, a largura x deve estar entre 0 e 200 metros.

Resposta: O domínio da função é $D(A) = (0, 200)$.

Funções Essenciais

15. O domínio de funções logarítmicas é uma fonte comum de erros. Resolva a seguinte equação logarítmica, lembrando-se de verificar as condições de existência das soluções:

$$\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$$

Solution: Condição de Existência: Os argumentos dos logaritmos devem ser estritamente positivos.

- $x - 1 > 0 \implies x > 1$
- $x + 1 > 0 \implies x > -1$

A interseção das duas condições é $x > 1$. Qualquer solução encontrada deve satisfazer esta condição.

Resolvendo a equação: É preciso utilizar a propriedade da soma dos logaritmos, $\log_b(A) + \log_b(B) = \log_b(A \cdot B)$:

$$\log_2((x-1)(x+1)) = 3$$

Pela definição de logaritmo, $b^y = x$, temos:

$$\begin{aligned}(x-1)(x+1) &= 2^3 \\ x^2 - 1 &= 8 \\ x^2 &= 9 \\ x &= \pm 3\end{aligned}$$

Temos duas soluções matemáticas: $x = 3$ e $x = -3$. Agora, verificamos com a condição de existência ($x > 1$).

- $x = 3$: Satisfaz a condição ($3 > 1$).
- $x = -3$: Não satisfaz a condição ($-3 \not> 1$).

Resposta: O conjunto solução é $S = \{3\}$.

16. A resolução de equações trigonométricas exige o conhecimento do círculo trigonométrico e das periodicidades. Encontre todas as soluções da equação $2 \cos^2(\theta) - 1 = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

Solution: Primeiro, isolamos $\cos^2(\theta)$:

$$2 \cos^2(\theta) = 1 \implies \cos^2(\theta) = \frac{1}{2}$$

Tirando a raiz quadrada de ambos os lados, obtemos duas possibilidades:

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Agora, encontramos os ângulos θ no intervalo $[0, 2\pi]$ para cada caso.

- Para $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, os ângulos são $\theta = \frac{\pi}{4}$ (1º quadrante) e $\theta = \frac{7\pi}{4}$ (4º quadrante).
- Para $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, os ângulos são $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (2º quadrante) e $\theta = \frac{5\pi}{4}$ (3º quadrante).

Resposta: O conjunto solução no intervalo $[0, 2\pi]$ é $S = \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$.

17. A "grandeza" de um infinito não é sempre a mesma. Use seu conhecimento sobre o comportamento de funções para comparar o crescimento das seguintes funções quando $x \rightarrow \infty$. Coloque-as em ordem, da que cresce mais lentamente para a que cresce mais rapidamente:

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = e^x \quad h(x) = \ln(x) \quad k(x) = \sqrt{x}$$

Solution: A hierarquia de crescimento para funções básicas quando $x \rightarrow \infty$ é bem estabelecida: funções logarítmicas crescem mais lentamente que funções de potência, que por sua vez crescem mais lentamente que funções exponenciais.

1. **Crescimento mais lento:** A função logarítmica, $h(x) = \ln(x)$.
2. **Funções de Potência:** Entre $f(x) = x^2$ e $k(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, a função com o menor expoente cresce mais lentamente. Portanto, $k(x)$ cresce mais devagar que $f(x)$.
3. **Crescimento mais rápido:** A função exponencial, $g(x) = e^x$, cresce mais rápido que qualquer função de potência.

Resposta: A ordem, da que cresce mais lentamente para a mais rápida, é:

$$h(x) = \ln(x) \rightarrow k(x) = \sqrt{x} \rightarrow f(x) = x^2 \rightarrow g(x) = e^x$$

18. A amplitude, o período e a fase são parâmetros que descrevem oscilações em sistemas físicos. Dada a função $f(t) = -10 \cos(4\pi t - \frac{\pi}{2}) + 5$, identifique:
- A amplitude da oscilação.
 - O período da função.
 - O deslocamento de fase.
 - O deslocamento vertical.

Solution: A forma geral de uma função cossenoidal é $A \cos(Bt - C) + D$. Comparando com $f(t) = -10 \cos(4\pi t - \frac{\pi}{2}) + 5$, temos: $A = -10$, $B = 4\pi$, $C = \frac{\pi}{2}$ e $D = 5$.

- (a) A **amplitude** é o valor absoluto de A .

$$\text{Amplitude} = |-10| = 10.$$

- (b) O **período** (T) é calculado por $T = \frac{2\pi}{|B|}$.

$$\text{Período} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \text{ segundos (ou unidades de tempo).}$$

- (c) O **deslocamento de fase** é dado por $\frac{C}{B}$.

$$\text{Deslocamento de Fase} = \frac{\pi/2}{4\pi} = \frac{1}{8} \text{ para a direita.}$$

- (d) O **deslocamento vertical** é o valor de D .

$$\text{Deslocamento Vertical} = 5 \text{ unidades para cima.}$$

19. O decaimento radioativo é modelado por uma função exponencial. A meia-vida do Césio-137 é de aproximadamente 30 anos. Se um laboratório possui uma amostra inicial de 200 gramas de Césio-137:
- Determine a função $M(t)$ que descreve a massa restante da amostra após t anos.
 - Qual será a massa restante após 90 anos?

Solution: A fórmula geral para o decaimento exponencial com base na meia-vida ($T_{1/2}$) é $M(t) = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}$. Dados do problema: $M_0 = 200$ g e $T_{1/2} = 30$ anos.

- (a) Substituindo os valores na fórmula, temos:

$$M(t) = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/30}$$

Resposta: A função é $M(t) = 200 \cdot (0.5)^{t/30}$.

- (b) Para encontrar a massa restante após $t = 90$ anos, substituímos na função:

$$M(90) = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{90/30} = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 200 \cdot \frac{1}{8} = 25$$

Resposta: A massa restante após 90 anos será de 25 gramas.

20. Em Manaus, a duração do dia (horas de luz solar) varia muito pouco ao longo do ano, mas em cidades de alta latitude essa variação é grande e pode ser modelada por uma função senoidal. Em uma cidade no hemisfério norte, a duração do dia, $D(t)$, em horas, pode ser modelada pela função:

$$D(t) = 12 + 4 \sin \left(\frac{2\pi}{365}(t - 81) \right)$$

onde t é o número de dias desde o início do ano ($t = 1$ para 1º de janeiro).

- (a) Qual a duração do dia mais longo e do dia mais curto do ano?
 (b) Qual a duração do dia em $t = 172$ (aproximadamente o solstício de verão)?

Solution:

- (a) A função seno varia entre -1 e 1. O **dia mais longo** ocorre quando $\sin(\dots) = 1$.

$$D_{max} = 12 + 4(1) = 16 \text{ horas}$$

O **dia mais curto** ocorre quando $\sin(\dots) = -1$.

$$D_{min} = 12 + 4(-1) = 12 - 4 = 8 \text{ horas}$$

- (b) Para encontrar a duração do dia em $t = 172$, substituímos na função:

$$D(172) = 12 + 4 \sin \left(\frac{2\pi}{365}(172 - 81) \right) = 12 + 4 \sin \left(\frac{2\pi}{365}(91) \right)$$

Note que 91 dias é aproximadamente $365/4$, então o argumento do seno é $\frac{2\pi}{365} \cdot \frac{365}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

$$D(172) \approx 12 + 4 \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = 12 + 4(1) = 16$$

Resposta: A duração do dia em $t = 172$ é de aproximadamente 16 horas, o que corresponde ao dia mais longo (solstício de verão).

Bons Estudos!!!

Capítulo 1

Limites e Continuidade

Sobre este capítulo

Após consolidar as bases algébricas, iniciamos agora a transição para o pensamento dinâmico do cálculo diferencial e integral. O estudo de limites permite investigar o comportamento de funções em vizinhanças de pontos onde a aritmética convencional muitas vezes falha, como em divisões por zero ou tendências ao infinito. Compreender como os valores de uma função se aproximam de um alvo é o alicerce fundamental para construção do raciocínio infinitesimal que são base para a continuidade e a taxa de variação instantânea.

Competências e habilidades

- **Percepção de Vizinhança:** Compreender o comportamento de uma função em proximidade a pontos de interesse, distinguindo o valor real de sua tendência.
- **Resolução de Indeterminações:** Desenvolver estratégias algébricas para abordar indefinições do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ para encontrar o limite real de uma expressão.
- **Análise de Tendências Assintóticas:** Interpretar o comportamento de funções no longo prazo e ao redor de pontos de crescimento explosivo, identificando as fronteiras verticais e horizontais que estruturam os limites da função e sua representação gráfica.
- **Discernimento de Continuidade:** Avaliar a estabilidade de funções através da convergência de limites laterais, identificando pontos de ruptura e garantindo a fundamentação para o estudo de derivadas.

***Dica de Estudo:** Utilize o Laboratório Virtual para explorar as regiões de crescimento explosivo e as tendências de longo prazo, usando o poder do Python para verificar vizinhanças com a precisão que o papel dificilmente alcança. A segurança dos seus resultados reside na fundamentação teórica dos teoremas de continuidade e no rigor algébrico para tratar indeterminações.*

Laboratório Virtual: Limites

Explore o conteúdo desta unidade de forma interativa e dinâmica através de simulações e desafios em Python, utilizando a plataforma do Google Colab. Escaneie o QRcode ou acesse o link para iniciar sua prática.

https://colab.research.google.com/github/professorpalhares/Matematica/blob/main/Funcoes-de-uma-Variavel/Lista_1_limites.ipynb



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas	
Campus	Manaus - Distrito Industrial
Curso	Bacharelado em Engenharia de Computação
Disciplina	ECP12 - Cálculo Diferencial e Integral I
Docente	Eduardo Palhares Júnior

Lista 1: Limites e continuidade

Intuição e Análise Gráfica de Limites

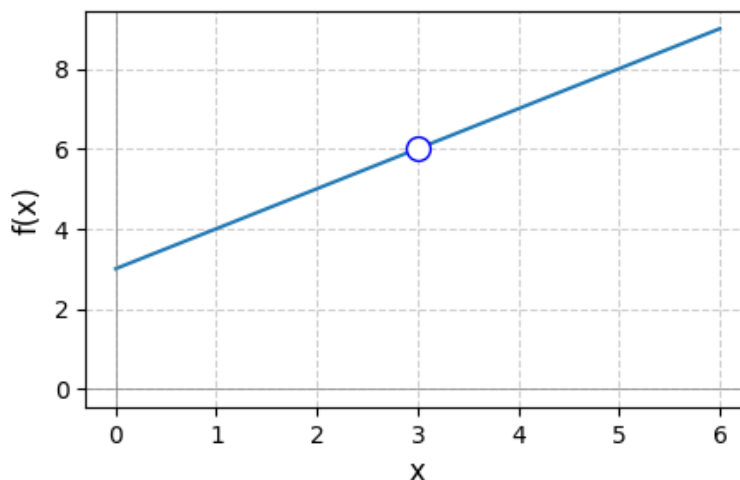
- Considere a função $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.
 - Qual o domínio da função $g(x)$?
 - Esboce o gráfico da função. O que você observa no ponto $x = 3$?
 - Crie uma tabela de valores para $g(x)$ com x se aproximando de 3 pela esquerda (ex: 2.9, 2.99, 2.999) e pela direita (ex: 3.1, 3.01, 3.001).
 - Qual sua conjectura para o valor de $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$?

Solution:

- O denominador da função não pode ser zero, portanto, a restrição é $x - 3 \neq 0$, o que implica $x \neq 3$. O domínio da função é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$.
- Fatorando o numerador, podemos simplificar a função para $x \neq 3$:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$$

O gráfico de $f(x)$ é, portanto, a reta $y = x + 3$ com um ponto de descontinuidade (um ponto aberto) em $x = 3$. A coordenada y desse ponto seria $y = 3 + 3 = 6$.



(c) A tabela de valores para $f(x) = x + 3$ com x se aproximando de 3 é:

x	$f(x)$
2.9	5.9
2.99	5.99
2.999	5.999
↓	↑
3.001	6.001
3.01	6.01
3.1	6.1

(d) Com base na simplificação da função para $f(x) = x + 3$ (para $x \neq 3$) e na análise da tabela de valores, que mostra $f(x)$ se aproximando de 6 conforme x se aproxima de 3, a conjectura é:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

2. Analise a função $g(x)$ definida por partes:

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ 3 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

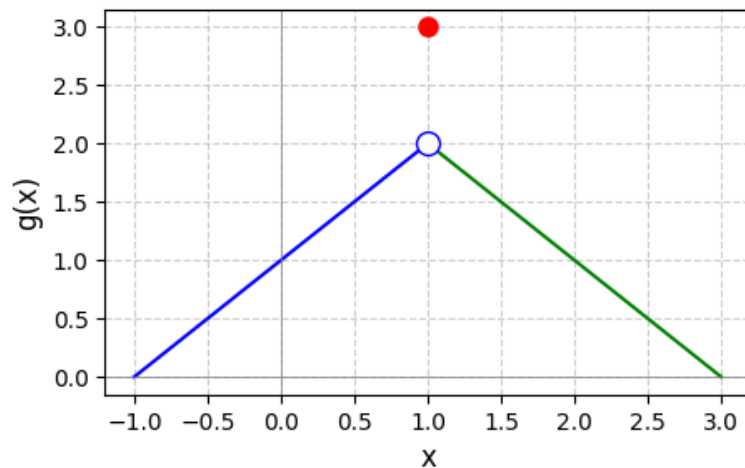
(a) Esboce o gráfico da função.

(b) Crie uma tabela de valores para $f(x)$ com $x \approx 1$.

(c) O que você pode concluir sobre $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?

Solution:

(a) O gráfico da função é composto por três partes:



(b) A tabela de valores para $g(x)$ com x próximo de 1 é:

$x \rightarrow 1^-$	$g(x) = x + 1$	$x \rightarrow 1^+$	$g(x) = 3 - x$
0.9	1.9	1.1	1.9
0.99	1.99	1.01	1.99
0.999	1.999	1.001	1.999

(c) Para determinar o limite, calculamos os limites laterais:

- Limite pela esquerda: $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 1 + 1 = 2$.
- Limite pela direita: $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3 - x) = 3 - 1 = 2$.

Como os limites laterais são iguais, o limite $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ existe e é igual a 2. Note que este valor é diferente do valor da função no ponto, $g(1) = 3$.

3. Com base no gráfico da função $h(x)$, estime o valor de cada limite. Se o limite não existir, explique o porquê.

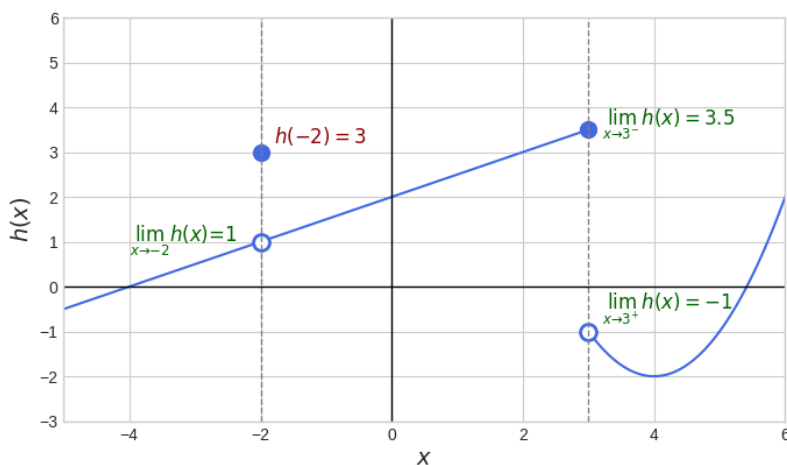
(a) $\lim_{x \rightarrow -2} h(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} h(x)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$



Solution:

- (a) Ao observar o gráfico, vemos que à medida que x se aproxima de -2 tanto pela esquerda quanto pela direita, a curva da função se aproxima da altura $y = 1$. Portanto, $\lim_{x \rightarrow -2} h(x) = 1$.
- (b) No ponto $x = 0$, a função é contínua (não há saltos ou buracos no gráfico). A curva passa diretamente pelo ponto $(0, 2)$. Assim, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 2$.
- (c) Para o limite lateral esquerdo em $x = 3$, olhamos o comportamento da função para valores de x ligeiramente menores que 3. O gráfico mostra a função se aproximando do valor $y = 3.5$. Logo, $\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = 3.5$.
- (d) Para o limite lateral direito em $x = 3$, olhamos o comportamento para valores de x ligeiramente maiores que 3. O gráfico mostra a função se aproximando do valor $y = -1$. Logo, $\lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = -1$.
- (e) O limite bilateral $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$ existe somente se os limites laterais forem iguais. Como $\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = 3.5$ e $\lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = -1$, os limites são diferentes. Portanto, o limite $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$ não existe.

4. Esboce o gráfico de uma função $f(x)$ que satisfaça todas as seguintes condições:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

$$f(0) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty$$

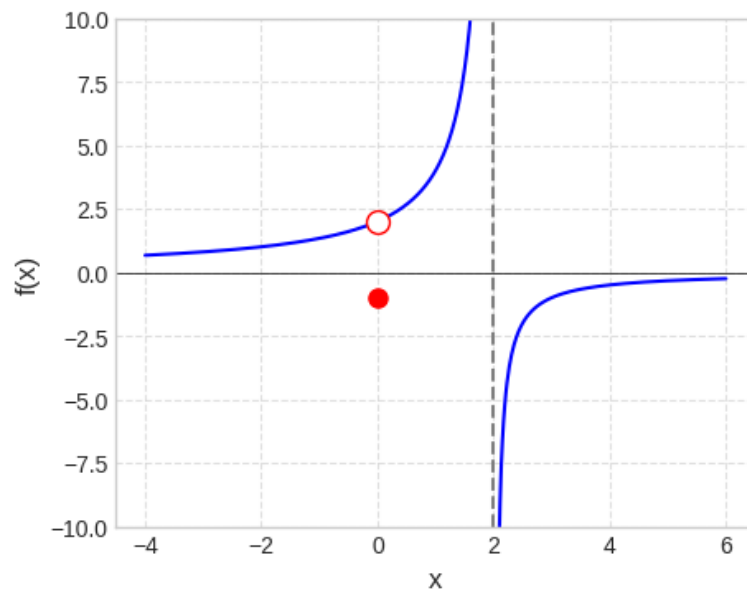
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

Solution: Existem infinitas funções que satisfazem as condições dadas. Para tornar a análise concreta, podemos propor uma função específica e então esboçar seu gráfico. Uma abordagem é construir uma função definida por partes que modele cada comportamento exigido.

- Para a assíntota vertical em $x = 2$ com os comportamentos $\rightarrow \infty$ pela esquerda e $\rightarrow -\infty$ pela direita, podemos usar funções racionais como $\frac{k}{2-x}$.
- Para a descontinuidade em $x = 0$, onde o limite é 2 mas o valor é -1, definimos o ponto $(0, -1)$ explicitamente.

Uma função que atende a todos os requisitos é:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{2-x} & \text{se } x < 2 \text{ e } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{-1}{x-2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$



Esta função possui o limite correto em $x = 0$, o valor $f(0) = -1$ e a assíntota vertical desejada em $x = 2$. O gráfico ilustra claramente:

- Uma assíntota vertical em $x = 2$.
- A função tendendo a $+\infty$ quando $x \rightarrow 2^-$.
- A função tendendo a $-\infty$ quando $x \rightarrow 2^+$.
- Um ponto aberto em $(0, 2)$, indicando que o limite da função é 2.
- Um ponto fechado em $(0, -1)$, indicando o valor da função $f(0) = -1$.

Cálculo de Limites e Assíntotas

5. Considere a função definida por partes $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \leq 2 \\ 5 - x & \text{se } x > 2 \end{cases}$

- (a) Calcule os limites laterais $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$,
 (b) Determine se $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe.

Solution:

- (a) Para calcular os limites laterais, utilizamos a regra da função correspondente ao lado de aproximação.

Limite pela esquerda ($x \rightarrow 2^-$):

Utilizamos a expressão $f(x) = 2x - 1$, pois é válida para $x \leq 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - 1) = 2(2) - 1 = 3$$

Limite pela direita ($x \rightarrow 2^+$):

Utilizamos a expressão $f(x) = 5 - x$, pois é válida para $x > 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (5 - x) = 5 - 2 = 3$$

- (b) O limite bilateral $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe se, e somente se, os limites laterais são iguais. A partir dos cálculos no item (a), temos:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$$

Como os limites laterais são iguais, o limite existe e seu valor é 3.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

6. Considere a função racional $f(x) = \frac{x - 1}{|x - 1|}$

- (a) Calcule os limites laterais $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$,
 (b) O que isso implica para o limite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?

Solution:

- (a) Para calcular os limites laterais, primeiro reescrevemos a função $f(x)$ sem o módulo, considerando os casos em que o argumento $(x - 1)$ é positivo ou negativo.

- Se $x < 1$, então $(x - 1)$ é negativo, e $|x - 1| = -(x - 1)$. A função se torna:

$$f(x) = \frac{x - 1}{-(x - 1)} = -1$$

Portanto, o limite pela esquerda é:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -1$$

- Se $x > 1$, então $(x - 1)$ é positivo, e $|x - 1| = x - 1$. A função se torna:

$$f(x) = \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

Portanto, o limite pela direita é:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1) = 1$$

- (b) O limite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe se, e somente se, os limites laterais em $x = 1$ são iguais. Com base nos resultados do item (a):

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

Como os limites laterais são diferentes, então o limite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ não existe.

7. Calcule os limites abaixo e determine a assíntota horizontal

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 + 7} \quad (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4 - 2x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x - 3}.$$

Solution:

- (a) A maior potência de x no denominador é x^2 . Dividimos o numerador e o denominador por x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{7}{x^2}} = \frac{3 - 0 + 0}{2 + 0} = \frac{3}{2}$$

A assíntota horizontal é a reta $y = \frac{3}{2}$.

- (b) A maior potência de x no denominador é x^4 . Dividimos o numerador e o denominador por x^4 :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}}{1 - \frac{2}{x^3}} = \frac{0 + 0}{1 - 0} = 0$$

A assíntota horizontal é a reta $y = 0$.

- (c) A maior potência de x no denominador é x . Dividimos o numerador e o denominador por x . Como $x \rightarrow \infty$, x é positivo, então podemos escrever $x = \sqrt{x^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{x - 3}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}}{\frac{x}{x} - \frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{4 + 0}}{1 - 0} = 2$$

A assíntota horizontal é a reta $y = 2$.

8. Seja a função $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - x - 6}$, determine as assíntotas horizontais e verticais. Para as assíntotas verticais, investigue os limites laterais.

Solution: A análise da função é feita em três etapas: assíntotas horizontais, assíntotas verticais e os limites laterais em torno das assíntotas verticais.

1. Assíntotas Horizontais

Calculamos o limite com $x \rightarrow \pm\infty$. Como os graus do numerador e do denominador são iguais (grau 2), o limite é a razão dos coeficientes líderes.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - x - 6} = \frac{2}{1} = 2$$

Portanto, a assíntota horizontal é a reta $y = 2$.

2. Assíntotas Verticais

As assíntotas verticais ocorrem onde o denominador é zero.

$$x^2 - x - 6 = 0 \implies (x - 3)(x + 2) = 0$$

As assíntotas verticais são as retas $x = 3$ e $x = -2$.

3. Investigação dos Limites Laterais

- **Análise em torno de $x = 3$:**

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{18}{(0^+)(5)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{18}{(0^-)(5)} = -\infty$$

- **Análise em torno de $x = -2$:**

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{8}{(-5)(0^+)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{8}{(-5)(0^-)} = +\infty$$

Propriedades de Limites

9. Utilize as propriedades para simplificar e calcular os limites abaixo:

- | | | |
|--|--|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x^2 + 5)$ | (d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$ | (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1}$ | (e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3}$ | (h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^3 + 8}$ | (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ |

Solution:

(a) Por substituição direta em um polinômio: $2^3 - 2(2^2) + 5 = 5$.

(b) Fatorando o numerador:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+4)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+4) = 3$$

(c) Multiplicando pelo conjugado do denominador:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = 4$$

(d) Expandindo o numerador:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6+h)}{h} = 6$$

(e) Simplificando a fração complexa:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{3x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{3x} = -\frac{1}{9}$$

(f) Fatorando a soma de cubos $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{1}{12}$$

(g) Multiplicando pelo conjugado do numerador:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{2}$$

(h) Fatorando ambos os polinômios:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

(i) Multiplicando pelo conjugado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/x}+1} = \frac{1}{2}$$

Continuidade

10. Considere a função $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ descontínua em $x = 5$. Classifique essa descontinuidade e, se possível, redefina a função para torná-la contínua neste ponto.

Solution: Para classificar a descontinuidade da função $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ em $x = 5$, primeiro calculamos o limite neste ponto. A substituição direta resulta na forma indeterminada $\frac{0}{0}$, então simplificamos a expressão:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5}$$

Cancelando o termo $(x - 5)$, já que no limite $x \neq 5$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) = 5 + 5 = 10$$

Como o limite existe e é finito, a descontinuidade é classificada como **removível**.

Para tornar a função contínua em $x = 5$, devemos "remover" a descontinuidade definindo o valor da função no ponto como sendo igual ao seu limite. A função redefinida, $g(x)$, fica:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5}, & \text{se } x \neq 5 \\ 10, & \text{se } x = 5 \end{cases}$$

Esta nova função $g(x)$ é contínua para todos os números reais e seu gráfico corresponde à reta $y = x + 5$.

11. Identifique e classifique os pontos de descontinuidade da função $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$.

Solution: Para identificar e classificar os pontos de descontinuidade, o primeiro passo é fatorar completamente o numerador e o denominador da função.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 3)}$$

Os pontos de descontinuidade são os zeros do denominador: $x = 2$ e $x = 3$. Analisamos cada um separadamente.

• **Análise em $x = 2$:**

Observamos que o fator $(x - 2)$ aparece em ambos os termos e pode ser cancelado. Para classificar a descontinuidade, calculamos o limite da função simplificada:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x - 3} = \frac{2 + 2}{2 - 3} = \frac{4}{-1} = -4$$

Como o limite existe e é um número finito, a descontinuidade em $x = 2$ é **removível**.

• **Análise em $x = 3$:**

Após a simplificação, o fator $(x - 3)$ permanece no denominador. Isso indica uma assíntota vertical. O limite neste ponto será infinito:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 2}{x - 3} \rightarrow \frac{5}{0}$$

Como o limite é infinito, a descontinuidade em $x = 3$ é **infinita** (assíntota vertical).

12. Encontre o valor da constante a que torna $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & \text{se } x \leq 2 \\ x^2 + 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ contínua em $\mathbb{R}$

Solution: Para que a função $f(x)$ seja contínua em $\mathbb{R}$, ela deve ser contínua em todos os seus pontos. Como as partes da função são polinômios, a única potencial descontinuidade está no ponto de junção, $x = 2$.

A condição para a continuidade em $x = 2$ é que os limites laterais sejam iguais:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

Calculamos cada limite lateral separadamente:

• **Limite pela esquerda ($x \rightarrow 2^-$):**

Utilizamos a regra $f(x) = ax - 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - 1) = a(2) - 1 = 2a - 1$$

• **Limite pela direita ($x \rightarrow 2^+$):**

Utilizamos a regra $f(x) = x^2 + 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 3) = 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

Agora, igualamos os resultados para encontrar o valor de a :

$$2a - 1 = 7$$

$$2a = 8$$

$$a = 4$$

Portanto, o valor da constante que torna a função $f(x)$ contínua é $a = 4$.

13. Determine os valores de a e b para que a função $f(x)$ abaixo seja contínua $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < -1 \\ ax + b & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 4 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Solution: Para que a função seja contínua em $\mathbb{R}$, as partes da função devem se conectar nos pontos de junção, que são $x = -1$ e $x = 1$. Isso nos impõe duas condições de continuidade.

1. Continuidade em $x = -1$

O limite pela esquerda deve ser igual ao limite pela direita.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

Substituindo as expressões da função:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax + b) \\ (-1)^2 &= a(-1) + b \\ 1 &= -a + b \end{aligned} \tag{1}$$

2. Continuidade em $x = 1$

O limite pela esquerda deve ser igual ao limite pela direita.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Substituindo as expressões da função:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (4) \\ a(1) + b &= 4 \\ a + b &= 4 \end{aligned} \tag{2}$$

3. Resolvendo o Sistema de Equações

Agora, temos um sistema com as Equações 1 e 2

$$\begin{cases} -a + b = 1 \\ a + b = 4 \end{cases}$$

Somando as duas equações, o termo a é eliminado:

$$2b = 5 \implies b = 2.5$$

Substituindo o valor de b na Equação 2:

$$a + 2.5 = 4 \implies a = 1.5$$

Portanto, os valores que tornam a função contínua são $a = 1.5$ e $b = 2.5$.

Teoremas Fundamentais

14. Considerando $2x - 1 \leq f(x) \leq x^2 - 2x + 3$ para todo x , encontre $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Solution: Este problema é uma aplicação direta do Teorema do Confronto (ou Teorema do Sanduíche). O teorema estabelece que se uma função $f(x)$ está contida entre duas outras funções, $g(x)$ e $h(x)$, e se ambas $g(x)$ e $h(x)$ tendem ao mesmo limite L em um ponto a , então $f(x)$ também deve tender a L nesse ponto.

A inequação dada é:

$$2x - 1 \leq f(x) \leq x^2 - 2x + 3$$

Vamos identificar nossas funções de limite como $g(x) = 2x - 1$ e $h(x) = x^2 - 2x + 3$. O ponto de interesse é $a = 2$.

Primeiro, calculamos o limite da função inferior quando $x \rightarrow 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 2(2) - 1 = 3$$

Em seguida, calculamos o limite da função superior quando $x \rightarrow 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3) = 2^2 - 2(2) + 3 = 4 - 4 + 3 = 3$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 3$, e como $f(x)$ está sempre entre $g(x)$ e $h(x)$, pelo Teorema do Confronto, concluímos que o limite de $f(x)$ também deve ser 3.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

15. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Solution: A substituição direta de $x = 0$ na função $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ não é possível devido ao termo $\cos\left(\frac{1}{0}\right)$. A estrutura da função — um termo que tende a zero (x^2) multiplicando um termo limitado que oscila ($\cos$) — é a indicação clássica para o uso do Teorema do Confronto.

Primeiro, partimos da propriedade fundamental da função cosseno, que é limitada entre -1 e 1 para qualquer entrada:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1, \quad \text{para todo } x \neq 0$$

Em seguida, multiplicamos todos os membros da inequação por x^2 . Como x^2 é uma quantidade não-negativa, a direção das desigualdades é preservada:

$$-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x^2$$

Isso "espreme" a função original entre as funções $g(x) = -x^2$ e $h(x) = x^2$. Agora, calculamos os limites dessas duas funções de contorno quando $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2) = 0$$

Como a função $x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ está contida entre duas funções que tendem ao mesmo limite (zero) em $x = 0$, pelo Teorema do Confronto, ela também deve tender a zero.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

16. Mostre que a equação $x^3 - 4x + 1 = 0$ tem uma raiz no intervalo $[0, 1]$.

Solution: Para provar que a equação possui uma raiz no intervalo dado, utilizamos o Teorema do Valor Intermediário (TVI). O teorema requer que a função seja contínua no intervalo fechado e que o valor desejado esteja entre os valores da função nos extremos do intervalo.

1. Definir a função e verificar a continuidade

Seja a função $f(x) = x^3 - 4x + 1$. Encontrar uma raiz da equação é equivalente a encontrar um c tal que $f(c) = 0$. Como $f(x)$ é uma função polinomial, ela é contínua em todo o $\mathbb{R}$, e, portanto, é contínua no intervalo fechado $[0, 1]$.

2. Avaliar a função nos extremos do intervalo

Calculamos os valores de $f(x)$ em $x = 0$ e $x = 1$:

- $f(0) = (0)^3 - 4(0) + 1 = 1$
- $f(1) = (1)^3 - 4(1) + 1 = 1 - 4 + 1 = -2$

3. Aplicar o TVI

Temos que $f(0) = 1$ (positivo) e $f(1) = -2$ (negativo). O valor que buscamos é $k = 0$, que está contido no intervalo entre $f(1)$ e $f(0)$ (ou seja, $-2 < 0 < 1$).

Como $f(x)$ é contínua em $[0, 1]$ e $k = 0$ está entre $f(0)$ e $f(1)$, o TVI garante que existe pelo menos um número c no intervalo $(0, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

Isso prova que a equação $x^3 - 4x + 1 = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $[0, 1]$.

17. Mostre que a função $f(x) = \cos(x) - x$ possui um zero (uma raiz) no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solution: Para mostrar que a função possui um zero, ou raiz, no intervalo, utilizamos o Teorema do Valor Intermediário (TVI).

1. Definir a função e verificar a continuidade

A função dada é $f(x) = \cos(x) - x$. O intervalo de análise é $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. A função $f(x)$ é a diferença entre a função cosseno e a função identidade ($y = x$). Ambas são contínuas em todo o conjunto dos números reais. Portanto, $f(x)$ também é contínua em $\mathbb{R}$ e, conseqüentemente, no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Avaliar a função nos extremos do intervalo

Calculamos os valores de $f(x)$ nos pontos $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$:

- $f(0) = \cos(0) - 0 = 1 - 0 = 1$
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

3. Aplicar o TVI

Nós buscamos um ponto c tal que $f(c) = 0$. Observamos que os valores nos extremos do intervalo têm sinais opostos: $f(0) = 1$ (positivo) e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ (negativo).

Como o valor $k = 0$ está entre $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e $f(0)$, e a função é contínua no intervalo, o TVI garante que deve existir pelo menos um número c no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ para o qual $f(c) = 0$.

Isso prova que a função $f(x) = \cos(x) - x$ possui um zero no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

18. Calcule os limites abaixo, considerando o limite fundamental $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg}(x)}$

Solution:

- (a) Para que possamos usar o limite fundamental, o argumento do seno e o denominador devem ser idênticos. Para isso, multiplicamos e dividimos a expressão por 5:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 5 \cdot \frac{\sin(5x)}{5x}$$

Fazendo a substituição de variável $\theta = 5x$, notamos que quando $x \rightarrow 0$, θ também tende a 0.

$$5 \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 5 \cdot 1 = 5$$

(b) Primeiro, reescrevemos a tangente em termos de seno e cosseno.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x)}{\sin(x)}$$

Agora, rearranjamos a expressão para isolar o limite fundamental e usamos a propriedade do limite de um produto.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)$$

O primeiro termo é o inverso do limite fundamental, e o segundo é calculado por substituição direta.

$$\left(\frac{1}{1}\right) \cdot (\cos(0)) = 1 \cdot 1 = 1$$

Revisão

19. Faça uma análise completa da função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$. Determine:

- Domínio e imagem.
- Limites laterais em $x = 1$. O limite neste ponto existe?
- Limites no infinito.
- Pontos de descontinuidade e suas classificações.
- Esboce um gráfico da função.

Solution: Para realizar uma análise completa, o primeiro passo é reescrever a função eliminando o módulo. Fatorando o numerador e analisando o sinal do denominador, temos:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{|x-1|} = \begin{cases} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = -(x+1), & \text{se } x < 1 \\ \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- (a) **Domínio:** A função é indefinida quando o denominador $|x - 1| = 0$, o que ocorre em $x = 1$. Portanto, $D = \mathbb{R} - \{1\}$.

Imagem:

- Para $x > 1$, $f(x) = x + 1$, cujo contradomínio é $(2, \infty)$.
- Para $x < 1$, $f(x) = -x - 1$, cujo contradomínio é $(-\infty, -2)$.

A imagem é a união: $I = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

(b) Limites Laterais em $x = 1$:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x - 1) = -1 - 1 = -2$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 1 + 1 = 2$

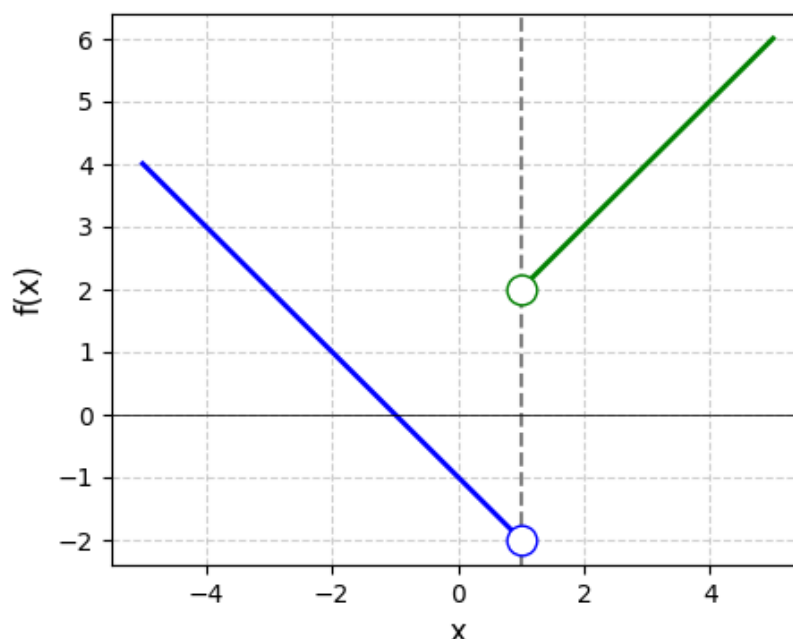
Como os limites laterais são diferentes, o limite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ não existe.

(c) Limites no Infinito:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - 1) = +\infty$

(d) **Pontos de Descontinuidade:** O único ponto de descontinuidade é em $x = 1$. Como os limites laterais existem, são finitos, mas diferentes, a descontinuidade é classificada como **de salto (finita)**.

(e) Esboço do Gráfico:



20. Dê um exemplo de duas funções, $f(x)$ e $g(x)$, tais que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ não existem, mas $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)]$ existe e é igual a zero.

Solution: A propriedade em questão é a ****Regra do Limite de um Produto****, que afirma que o limite do produto é o produto dos limites, *se os limites individuais existirem*. Este exercício pede um contraexemplo, onde essa condição não é satisfeita.

Para construir tal exemplo, podemos usar funções simples com descontinuidades de salto em $x = 0$, arranjadas de forma que o produto se anule.

1. Definição das Funções

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ definidas por partes:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

2. Análise dos Limites Individuais

Para $f(x)$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$. Como os limites laterais são diferentes, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe.

Para $g(x)$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$. Como os limites laterais são diferentes, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ não existe.

3. Análise do Limite do Produto

A função produto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ é:

- Para $x < 0$: $h(x) = f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot 1 = 0$.
- Para $x \geq 0$: $h(x) = f(x) \cdot g(x) = 1 \cdot 0 = 0$.

Portanto, a função produto é $h(x) = 0$ para todos os valores de x . O limite desta função é:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Assim, demonstramos um caso em que os limites dos fatores não existem, mas o limite do produto existe e é igual a zero.

Bons Estudos!!!

Capítulo 2

Derivadas

Sobre este capítulo

Consolidado o conceito de limite e a compreensão de vizinhanças, entramos agora no estudo da taxa de variação instantânea. A derivada é a ferramenta matemática que traduz o movimento e a mudança, transformando o limite abstrato na inclinação precisa de uma curva em um ponto. Neste capítulo, exploraremos a transição da reta secante para a tangente, construindo a base para entender como variações infinitesimais em uma variável impactam o comportamento global de um sistema.

Competências e habilidades

- **Percepção de Taxas Instantâneas:** Compreender a derivada como uma medida de sensibilidade, identificando a rapidez com que uma variável responde a alterações infinitesimais.
- **Domínio das Regras Operacionais:** Dominar a aplicação das regras de potência, produto e quociente, com ênfase na Regra da Cadeia para a derivação de funções compostas.
- **Geometria e Diferenciabilidade:** Analisar a derivada como inclinação da reta tangente e avaliar a suavidade de uma função em torno de pontos de interesse, para identificar descontinuidades e construir aproximações polinomiais.
- **Modelagem de Variações:** Aplicar o conceito de taxa de variação para traduzir fenômenos de movimento e mudança em modelos matemáticos, interpretando o resultado da derivada como uma resposta dinâmica do sistema.

Dica de Estudo: Utilize o Laboratório Virtual para visualizar a reta tangente "deslizando" sobre a curva e verifique as vizinhanças onde a aproximação linear é mais precisa. O poder do Python permitirá que você observe onde a função perde a suavidade e a derivada deixa de existir.

Laboratório Virtual: Derivadas

Explore o conteúdo desta unidade de forma interativa e dinâmica através de simulações e desafios em Python, utilizando a plataforma do Google Colab. Escaneie o QRcode ou acesse o link para iniciar sua prática.

https://colab.research.google.com/github/professorpalhares/Matematica/blob/main/Funcoes-de-uma-Variavel/Lista_2_derivadas.ipynb



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas	
Campus	Manaus - Distrito Industrial
Curso	Engenharia de Computação
Disciplina	ECP12 - Cálculo Diferencial e Integral I
Docente	Eduardo Palhares Júnior

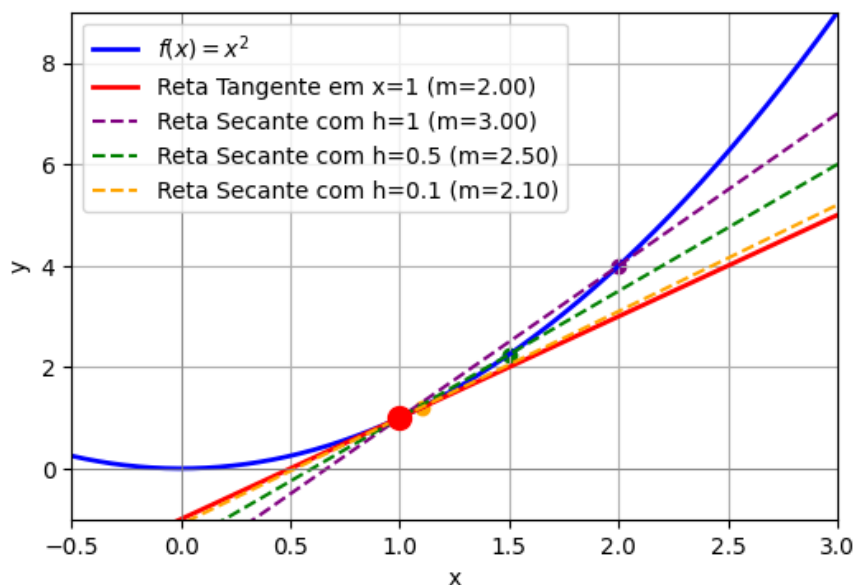
Lista 2: Derivadas

Conceito de derivada

- Considere a função $f(x) = x^2$ e o ponto $a = 1$.
 - Faça o gráfico de $f(x)$ junto com as retas secantes que passam pelos pontos $(1, f(1))$ e $(1+h, f(1+h))$ para $h = 1$, $h = 0.5$ e $h = 0.1$.
 - Calcule a derivada $f'(1)$ e represente a reta tangente no mesmo gráfico. O que você observa sobre as retas secantes à medida que $h \rightarrow 0$?

Solution:

- (a) O gráfico abaixo mostra a função $f(x) = x^2$, as três retas secantes para $h = 1$, $h = 0.5$ e $h = 0.1$ (tracejadas) e a reta tangente no ponto $(1, 1)$.



- (b) A derivada de $f(x) = x^2$ é $f'(x) = 2x$. No ponto $a = 1$, a derivada é $f'(1) = 2(1) = 2$. Este é o coeficiente angular da reta tangente. A equação da reta tangente no ponto $(1, f(1)) = (1, 1)$ é:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \implies y - 1 = 2(x - 1) \implies y = 2x - 1$$

Observa-se que, à medida que $h \rightarrow 0$, as retas secantes se aproximam cada vez mais da reta tangente, tanto em inclinação quanto em posição. Seus coeficientes angulares (3 para $h = 1$, 2.5 para $h = 0.5$ e 2.1 para $h = 0.1$) tendem ao coeficiente angular da reta tangente, que é 2.

2. Utilize a definição para calcular a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = 3x + 5$

(b) $g(x) = x^2 - 4x + 1$

(c) $h(x) = \sqrt{x}$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Solution:

(a) **Para** $f(x) = 3x + 5$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(x+h) + 5] - [3x + 5]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x + 3h + 5 - 3x - 5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 = 3 \end{aligned}$$

(b) **Para** $g(x) = x^2 - 4x + 1$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 - 4(x+h) + 1] - [x^2 - 4x + 1]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h + 1 - x^2 + 4x - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - 4h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h - 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 4) = 2x - 4 \end{aligned}$$

(c) **Para** $h(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

3. A posição de uma partícula se movendo ao longo de um eixo é $s(t) = t^2 - 4t + 1$.
- (a) Determine a velocidade instantânea da partícula no instante $t = 3$ segundos.
 - (b) Qual a interpretação do sinal da sua resposta?
 - (c) Encontre a equação da reta tangente à função $s(t)$ no instante $t = 3$.

Solution:

- (a) A velocidade instantânea $v(t)$ é a derivada da função de posição $s(t)$.

$$v(t) = s'(t) = \frac{d}{dt}(t^2 - 4t + 1) = 2t - 4$$

No instante $t = 3$ segundos, a velocidade é:

$$v(3) = 2(3) - 4 = 6 - 4 = 2 \text{ m/s}$$

- (b) O sinal positivo da velocidade ($v(3) > 0$) indica que no instante $t = 3$ s, a partícula está se movendo na direção positiva do eixo de movimento.
- (c) A equação da reta tangente à função $s(t)$ em $t = 3$ tem como coeficiente angular o valor da derivada nesse ponto, ou seja, $m = s'(3) = 2$. O ponto de tangência é $(3, s(3))$.

$$s(3) = (3)^2 - 4(3) + 1 = 9 - 12 + 1 = -2$$

O ponto é $(3, -2)$. Usando a equação ponto-inclinação $(y - y_0) = m(t - t_0)$:

$$y - (-2) = 2(t - 3) \implies y + 2 = 2t - 6 \implies y = 2t - 8$$

4. Explique conceitualmente por que se uma função é diferenciável em um ponto a , ela também deve ser contínua nesse ponto. É a recíproca verdadeira? Justifique com um exemplo (pode ser um esboço de gráfico).

Solution: Parte 1: Diferenciabilidade implica Continuidade Conceitualmente, a existência da derivada $f'(a)$ significa que existe uma reta tangente bem definida no ponto $(a, f(a))$. Para que isso seja possível, a função deve se aproximar de $f(a)$ de forma "suave" quando x se aproxima de a . Se a função fosse descontínua em a (tivesse um salto ou um buraco), não seria possível definir uma única reta tangente, pois a própria curva estaria "quebrada" nesse ponto.

Formalmente utilizamos a definição de continuidade. Se $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe, podemos mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Parte 2: A Recíproca é Falsa A recíproca não é verdadeira. Uma função pode ser contínua em um ponto, mas não ser diferenciável nesse ponto. Continuidade significa que o gráfico não tem interrupções, mas não impede a existência de "cantos agudos" ou "bicos", nos quais a derivada não existe.

O exemplo clássico é a função valor absoluto, $f(x) = |x|$, no ponto $a = 0$.

- **Continuidade:** A função é contínua em $x = 0$, pois $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|$. O gráfico pode ser desenhado sem tirar o lápis do papel.
- **Não-Diferenciabilidade:** A função tem um canto agudo em $x = 0$. Se calcularmos as derivadas laterais, veremos que elas são diferentes:
 - A inclinação à direita de $x = 0$ é 1.
 - A inclinação à esquerda de $x = 0$ é -1.

Como os limites laterais que definem a derivada não são iguais, a derivada $f'(0)$ não existe.

Regras de derivação

5. Utilize as derivadas notáveis para calcular a derivada das seguintes funções:

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|
| (a) $x^5 - 12x^3 + 2x - 7$ | (f) $7 \ln(x) - \frac{1}{\sqrt{x}}$ | (k) $\tan(x) - \cot(x)$ |
| (b) $\frac{1}{x^4}$ | (g) $4^x + x^4$ | (l) $e^x + \csc(x)$ |
| (c) $2\sqrt{t} + \sqrt[3]{t}$ | (h) $\log_5(t) + \pi^2$ | (m) $4 \arcsin(x) + 10$ |
| (d) $(x+2)^2$ | (i) $\sin(x) - 3 \cos(x)$ | (n) $x^3 - \arctan(x)$ |
| (e) $5e^x + 3x^2$ | (j) $\theta^2 + \sec(\theta)$ | (o) $5 \sinh(t) - 2 \cosh(t)$ |
| | | (p) $\ln(x) + \tanh(x)$ |

Solution:

- (a) Para $f(x) = x^5 - 12x^3 + 2x - 7$, aplicando a Regra da Potência termo a termo:

$$f'(x) = 5x^4 - 12(3x^2) + 2(1) - 0 = 5x^4 - 36x^2 + 2$$

- (b) Para $f(x) = \frac{1}{x^4}$, reescrevemos como $f(x) = x^{-4}$ e aplicamos a Regra da Potência:

$$f'(x) = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$$

- (c) Para $f(t) = 2\sqrt{t} + \sqrt[3]{t}$, reescrevemos como $f(t) = 2t^{1/2} + t^{1/3}$ e derivamos:

$$f'(t) = 2 \left(\frac{1}{2} t^{-1/2} \right) + \frac{1}{3} t^{-2/3} = t^{-1/2} + \frac{1}{3} t^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$$

- (d) Para $f(x) = (x+2)^2$, primeiro expandimos a expressão para $f(x) = x^2 + 4x + 4$:

$$f'(x) = 2x + 4$$

- (e) Para $f(x) = 5e^x + 3x^2$, usamos a derivada da exponencial e a Regra da Potência:

$$f'(x) = 5e^x + 6x$$

- (f) Para $f(x) = 7 \ln(x) - \frac{1}{\sqrt{x}}$, reescrevemos como $f(x) = 7 \ln(x) - x^{-1/2}$:

$$f'(x) = 7 \left(\frac{1}{x} \right) - \left(-\frac{1}{2} x^{-3/2} \right) = \frac{7}{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

- (g) Para $f(x) = 4^x + x^4$, usamos a regra da exponencial geral e a Regra da Potência:

$$f'(x) = 4^x \ln(4) + 4x^3$$

- (h) Para $f(t) = \log_5(t) + \pi^2$, usamos a regra do logaritmo geral (a derivada da constante π^2 é zero):

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln(5)}$$

- (i) Para $f(x) = \sin(x) - 3 \cos(x)$, usamos a derivada das funções trigonométricas:

$$f'(x) = \cos(x) - 3(-\sin(x)) = \cos(x) + 3 \sin(x)$$

- (j) Para $f(\theta) = \theta^2 + \sec(\theta)$, usamos a Regra da Potência e a derivada da secante:

$$f'(\theta) = 2\theta + \sec(\theta) \tan(\theta)$$

- (k) Para $f(x) = \tan(x) - \cot(x)$, usamos as derivadas da tangente e cotangente:

$$f'(x) = \sec^2(x) - (-\csc^2(x)) = \sec^2(x) + \csc^2(x)$$

- (l) Para $f(x) = e^x + \csc(x)$, usamos a derivada da exponencial e da cossecante:

$$f'(x) = e^x - \csc(x) \cot(x)$$

- (m) Para $f(x) = 4 \arcsin(x) + 10$, usamos a derivada do arco seno:

$$f'(x) = 4 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) + 0 = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$$

- (n) Para $f(x) = x^3 - \arctan(x)$, usamos a Regra da Potência e a derivada do arco tangente:

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{1+x^2}$$

- (o) Para $f(t) = 5 \sinh(t) - 2 \cosh(t)$, usamos a derivada das funções hiperbólicas:

$$f'(t) = 5 \cosh(t) - 2 \sinh(t)$$

- (p) Para $f(x) = \ln(x) + \tanh(x)$, usamos a derivada do logaritmo e da tangente hiperbólica:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \operatorname{sech}^2(x)$$

6. Utilize as regras de derivação para calcular a derivada das seguintes funções:

- | | | | |
|--------------------------|---------------------------|------------------------|-----------------------------|
| (a) $x^3 e^x$ | (e) $\frac{e^x}{\cos(x)}$ | (h) $(x^3 - 4x + 2)^5$ | (m) $\tan^3(x)$ |
| (b) $(x^2 + 1) \sin(x)$ | (f) $\frac{\sin(x)}{x^2}$ | (i) $\cos(x^2 + 1)$ | (n) $x^4 \sin(5x)$ |
| (c) $\ln(t) \tan(t)$ | (g) $\frac{te^t}{t+1}$ | (j) e^{3x^2-x} | (o) $\frac{e^{-2x}}{x^2+1}$ |
| (d) $\frac{2x+5}{x^2-1}$ | | (k) $\sqrt{t^2+9}$ | (p) $\sqrt{\cos(e^{x^2})}$ |
| | | (l) $\ln(\sin(x))$ | |

Solution:

(a) Para $f(x) = x^3 e^x$, usamos a Regra do Produto $(uv)' = u'v + uv'$:

$$f'(x) = (3x^2)(e^x) + (x^3)(e^x) = e^x(3x^2 + x^3)$$

(b) Para $f(x) = (x^2 + 1) \sin(x)$, usamos a Regra do Produto:

$$f'(x) = (2x)(\sin x) + (x^2 + 1)(\cos x)$$

(c) Para $f(t) = \ln(t) \tan(t)$, usamos a Regra do Produto:

$$f'(t) = \left(\frac{1}{t}\right)(\tan t) + (\ln t)(\sec^2 t)$$

(d) Para $f(x) = \frac{2x+5}{x^2-1}$, usamos a Regra do Quociente $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$f'(x) = \frac{(2)(x^2-1) - (2x+5)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2-2-4x^2-10x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2-10x-2}{(x^2-1)^2}$$

(e) Para $f(x) = \frac{e^x}{\cos(x)}$, usamos a Regra do Quociente:

$$f'(x) = \frac{(e^x)(\cos x) - (e^x)(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$$

(f) Para $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$, usamos a Regra do Quociente:

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(x^2) - (\sin x)(2x)}{(x^2)^2} = \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}$$

(g) Para $f(t) = \frac{te^t}{t+1}$, usamos a Regra do Produto e a Regra do Quociente:

$$f'(t) = \frac{(1 \cdot e^t + t \cdot e^t)(t+1) - (te^t)(1)}{(t+1)^2} = \frac{e^t(t+1)^2 - te^t}{(t+1)^2} = \frac{e^t(t^2 + t + 1)}{(t+1)^2}$$

(h) Para $f(x) = (x^3 - 4x + 2)^5$, usamos a Regra da Cadeia:

$$f'(x) = 5(x^3 - 4x + 2)^4 \cdot (3x^2 - 4)$$

(i) Para $f(x) = \cos(x^2 + 1)$, usamos a Regra da Cadeia:

$$f'(x) = -\sin(x^2 + 1) \cdot (2x) = -2x \sin(x^2 + 1)$$

(j) Para $f(x) = e^{3x^2-x}$, usamos a Regra da Cadeia:

$$f'(x) = e^{3x^2-x} \cdot (6x - 1)$$

(k) Para $f(t) = \sqrt{t^2 + 9}$, reescrevemos como $(t^2 + 9)^{1/2}$ e usamos a Regra da Cadeia:

$$f'(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 9)^{-1/2} \cdot (2t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 9}}$$

(l) Para $f(x) = \ln(\sin(x))$, usamos a Regra da Cadeia:

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot (\cos x) = \cot x$$

(m) Para $f(x) = \tan^3(x)$, reescrevemos como $(\tan x)^3$ e usamos a Regra da Cadeia:

$$f'(x) = 3(\tan x)^2 \cdot (\sec^2 x) = 3 \tan^2(x) \sec^2(x)$$

(n) Para $f(x) = x^4 \sin(5x)$, usamos a Regra do Produto e a Regra da Cadeia:

$$f'(x) = (4x^3)(\sin(5x)) + (x^4)(5 \cos(5x))$$

(o) Para $f(x) = \frac{e^{-2x}}{x^2 + 1}$, usamos a Regra do Quociente e a Regra da Cadeia:

$$f'(x) = \frac{(-2e^{-2x})(x^2 + 1) - (e^{-2x})(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2e^{-2x}(x^2 + x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

(p) Para $f(x) = \sqrt{\cos(e^{x^2})}$, usamos a Regra da Cadeia múltiplas vezes:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\cos(e^{x^2})}} \cdot (-\sin(e^{x^2})) \cdot (e^{x^2}) \cdot (2x) = \frac{-xe^{x^2} \sin(e^{x^2})}{\sqrt{\cos(e^{x^2})}}$$

7. Utilize derivação implícita para calcular $\frac{dy}{dx}$ nas seguintes funções:

(a) $x^2 + y^2 = 100$

(c) $\cos(y) + x = y^2$

(e) $x^2 + xy + y^2 = 3$

(b) $x^3 + y^3 = 8xy$

(d) $e^y \sin(x) = x + xy$

Solution:

(a) Para a equação $x^2 + y^2 = 100$, derivamos ambos os lados em relação a x :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) &= \frac{d}{dx}(100) \\ 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\ 2y \frac{dy}{dx} &= -2x \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}\end{aligned}$$

(b) Para $x^3 + y^3 = 8xy$, derivamos ambos os lados, usando a Regra do Produto no lado direito:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) &= \frac{d}{dx}(8xy) \\ 3x^2 + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} &= 8(1 \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx}) \\ 3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} &= 8y + 8x \frac{dy}{dx} \\ 3y^2 \frac{dy}{dx} - 8x \frac{dy}{dx} &= 8y - 3x^2 \\ \frac{dy}{dx}(3y^2 - 8x) &= 8y - 3x^2 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{8y - 3x^2}{3y^2 - 8x}\end{aligned}$$

(c) Para $\cos(y) + x = y^2$, derivamos ambos os lados:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cos(y) + x) &= \frac{d}{dx}(y^2) \\ -\sin(y) \cdot \frac{dy}{dx} + 1 &= 2y \cdot \frac{dy}{dx} \\ 1 &= 2y \frac{dy}{dx} + \sin(y) \frac{dy}{dx} \\ 1 &= \frac{dy}{dx}(2y + \sin(y)) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2y + \sin(y)}\end{aligned}$$

- (d) Para $e^y \sin(x) = x + xy$, derivamos ambos os lados usando a Regra do Produto:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^y \sin(x)) &= \frac{d}{dx}(x + xy) \\ (e^y \cdot \frac{dy}{dx}) \sin(x) + e^y \cos(x) &= 1 + (1 \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx}) \\ e^y \sin(x) \frac{dy}{dx} + e^y \cos(x) &= 1 + y + x \frac{dy}{dx} \\ e^y \sin(x) \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx} &= 1 + y - e^y \cos(x) \\ \frac{dy}{dx}(e^y \sin(x) - x) &= 1 + y - e^y \cos(x) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1 + y - e^y \cos(x)}{e^y \sin(x) - x}\end{aligned}$$

- (e) Para $x^2 + xy + y^2 = 3$, derivamos ambos os lados usando a Regra do Produto no termo xy :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2 + xy + y^2) &= \frac{d}{dx}(3) \\ 2x + \left(1 \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx}\right) + 2y \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\ x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} &= -2x - y \\ \frac{dy}{dx}(x + 2y) &= -2x - y \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-2x - y}{x + 2y}\end{aligned}$$

8. Utilize derivação logarítmica para calcular a derivada das seguintes funções:

(a) $x^{\sin(x)}$

(b) $(\ln x)^x$

(c) $\frac{(x^2 + 1)^4 \sqrt{x}}{\sin^3(x)}$

Solution:

- (a) Seja $y = x^{\sin(x)}$. Tomando o logaritmo natural de ambos os lados:

$$\begin{aligned}\ln(y) &= \ln(x^{\sin(x)}) \\ \ln(y) &= \sin(x) \cdot \ln(x)\end{aligned}$$

Derivando implicitamente em relação a x , e usando a Regra do Produto no

lado direito:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= (\cos(x))(\ln(x)) + (\sin(x)) \left(\frac{1}{x} \right) \\ \frac{dy}{dx} &= y \left[\cos(x) \ln(x) + \frac{\sin(x)}{x} \right]\end{aligned}$$

Substituindo $y = x^{\sin(x)}$ de volta:

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin(x)} \left[\cos(x) \ln(x) + \frac{\sin(x)}{x} \right]$$

(b) Seja $y = (\ln x)^x$. Tomando o logaritmo natural de ambos os lados:

$$\begin{aligned}\ln(y) &= \ln((\ln x)^x) \\ \ln(y) &= x \cdot \ln(\ln(x))\end{aligned}$$

Derivando implicitamente, usando a Regra do Produto e a Regra da Cadeia:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= (1) \cdot \ln(\ln(x)) + x \cdot \left(\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right) \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln x} \\ \frac{dy}{dx} &= y \left[\ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln x} \right]\end{aligned}$$

Substituindo $y = (\ln x)^x$ de volta:

$$\frac{dy}{dx} = (\ln x)^x \left[\ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln x} \right]$$

(c) Seja $y = \frac{(x^2 + 1)^4 \sqrt{x}}{\sin^3(x)}$. Tomando o logaritmo natural e usando suas propriedades:

$$\begin{aligned}\ln(y) &= \ln \left(\frac{(x^2 + 1)^4 \sqrt{x}}{\sin^3(x)} \right) \\ \ln(y) &= \ln((x^2 + 1)^4) + \ln(\sqrt{x}) - \ln(\sin^3(x)) \\ \ln(y) &= 4 \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} \ln(x) - 3 \ln(\sin(x))\end{aligned}$$

Derivando implicitamente:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= 4 \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} \right) - 3 \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right) \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{8x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x} - 3 \cot(x)\end{aligned}$$

Isolando $\frac{dy}{dx}$ e substituindo y de volta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 1)^4 \sqrt{x}}{\sin^3(x)} \left[\frac{8x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x} - 3 \cot(x) \right]$$

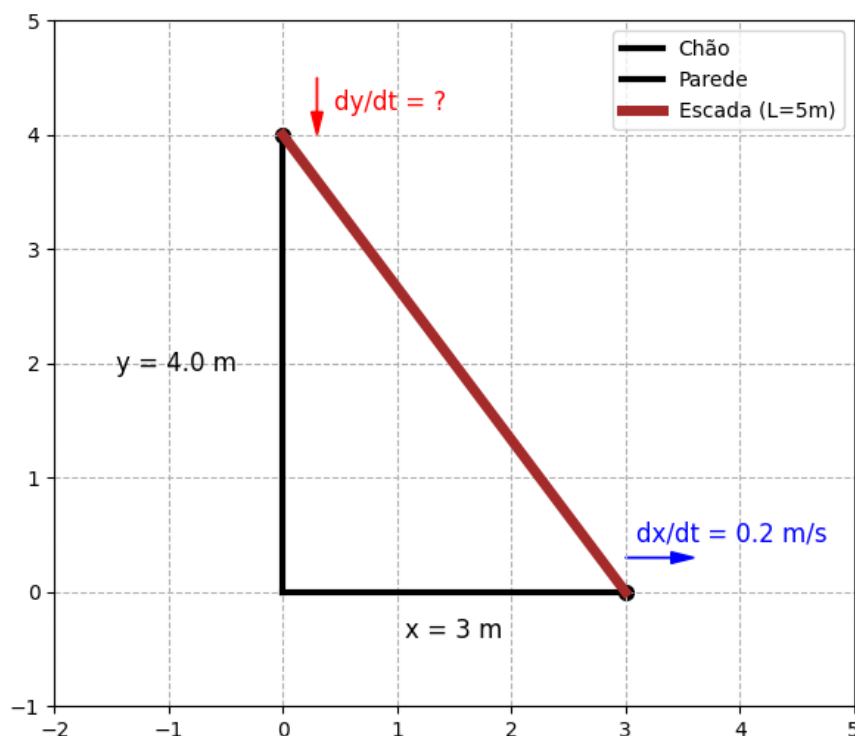
Taxas relacionadas, modelagem e otimização

9. Uma escada de 5 metros está apoiada em uma parede vertical. A base da escada começa a deslizar horizontalmente, afastando-se da parede a uma taxa constante de 0,2 m/s. Com que velocidade o topo da escada está descendo pela parede no instante em que a base está a 3 metros da parede?

Solution: Este é um problema clássico de taxas relacionadas. O primeiro passo é modelar a situação geometricamente.

1. Modelo e Equação: A escada, a parede e o chão formam um triângulo retângulo, onde a hipotenusa é o comprimento da escada (5 m). Seja x a distância da base da escada à parede e y a altura que a escada alcança na parede. Pelo Teorema de Pitágoras, temos a relação:

$$x^2 + y^2 = 5^2 \implies x^2 + y^2 = 25$$



2. Derivação (Taxas): Como as distâncias x e y mudam com o tempo, derivamos ambos os lados da equação implicitamente em relação ao tempo (t):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) &= \frac{d}{dt}(25) \\ 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Esta equação relaciona as taxas de variação das distâncias.

3. Análise do Instante Específico: Queremos encontrar $\frac{dy}{dt}$ no instante em que $x = 3$ m. Primeiro, precisamos encontrar o valor de y nesse mesmo instante usando a equação original:

$$(3)^2 + y^2 = 25 \implies 9 + y^2 = 25 \implies y^2 = 16 \implies y = 4 \text{ m}$$

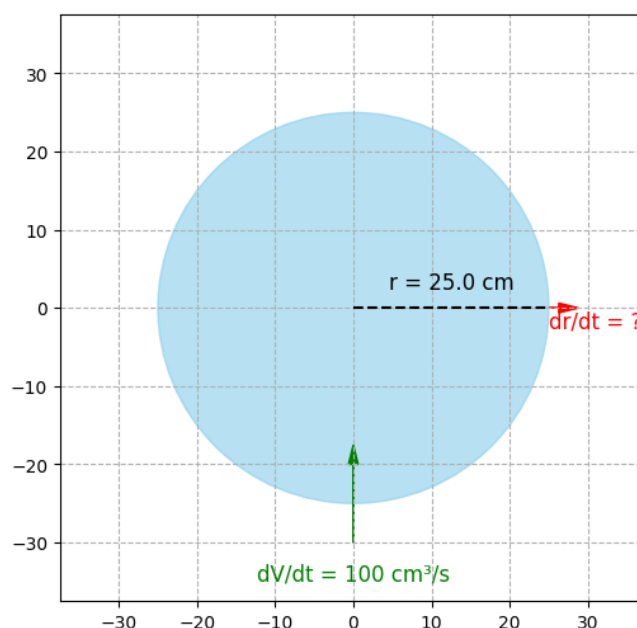
4. Cálculo Final: Agora, substituímos os valores conhecidos na equação das taxas. Nos foi dado que $\frac{dx}{dt} = 0.2$ m/s.

$$\begin{aligned} 2(3)(0.2) + 2(4)\frac{dy}{dt} &= 0 \\ 1.2 + 8\frac{dy}{dt} &= 0 \\ 8\frac{dy}{dt} &= -1.2 \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{1.2}{8} = -0.15 \text{ m/s} \end{aligned}$$

O sinal negativo confirma que a altura y está diminuindo. Portanto, a velocidade com que o topo da escada desce a parede é de **0.15 m/s**.

10. O ar está sendo bombeado para um balão esférico de tal forma que seu volume aumenta a uma taxa de $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. A que taxa o raio do balão está aumentando quando o diâmetro é de 50 cm?

Solution: 1. Modelo e Equação: O problema descreve um balão esférico.



A fórmula que relaciona o volume V e o raio r de uma esfera é: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

2. Derivação (Taxas): Para encontrar a relação entre as taxas de variação do volume e do raio, derivamos ambos os lados da equação em relação ao tempo t :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(V) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{4}{3}\pi \cdot \left(3r^2 \cdot \frac{dr}{dt}\right) \\ \frac{dV}{dt} &= 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}\end{aligned}$$

Esta equação mostra que a taxa de aumento do volume é igual à área da superfície da esfera ($4\pi r^2$) multiplicada pela taxa de aumento do raio.

3. Análise do Instante Específico: O problema pede para calcularmos $\frac{dr}{dt}$ no instante em que o diâmetro é de 50 cm.

- Se o diâmetro é 50 cm, então o raio é $r = \frac{50}{2} = 25$ cm.
- A taxa de variação do volume é dada como $\frac{dV}{dt} = 100$ cm³/s.

4. Cálculo Final: Substituímos os valores conhecidos na equação das taxas:

$$\begin{aligned}100 &= 4\pi(25)^2 \frac{dr}{dt} \\ 100 &= 4\pi(625) \frac{dr}{dt} \\ 100 &= 2500\pi \frac{dr}{dt} \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{100}{2500\pi} = \frac{1}{25\pi} \text{ cm/s}\end{aligned}$$

A taxa de aumento do raio do balão é de $\frac{1}{25\pi}$ cm/s.

11. Um tanque de água tem a forma de um cone circular invertido com base de raio 2 metros e altura de 4 metros. Se a água está sendo bombeada para fora do tanque a uma taxa de 2 m³/min, encontre a taxa na qual o nível da água está baixando quando a água tem 3 metros de profundidade.

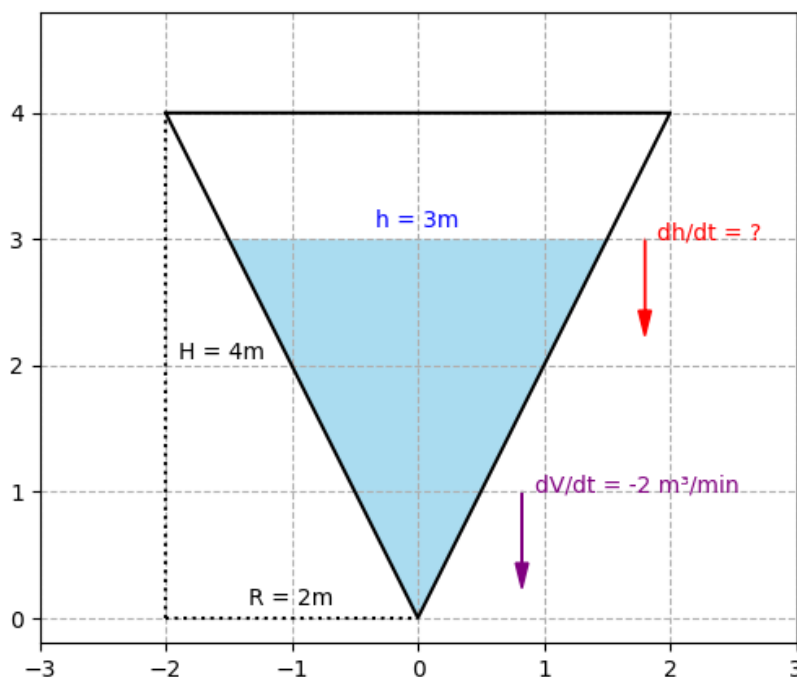
Solution: 1. Modelo e Equação: A água dentro do tanque cônico forma um cone menor com raio r e altura h variáveis. O volume desse cone de água é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Para relacionar as variáveis r e h , usamos a semelhança de triângulos, observando um corte transversal do tanque. A proporção entre o raio e a altura é constante:

$$\frac{r}{h} = \frac{\text{Raio do Tanque}}{\text{Altura do Tanque}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \implies r = \frac{h}{2}$$

Substituímos essa relação na fórmula do volume para ter uma equação com apenas uma variável (h):

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h^2}{4}\right) h = \frac{\pi}{12}h^3$$



2. Derivação (Taxas): Agora, derivamos o volume em relação ao tempo t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{12} h^3 \right) \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\pi}{12} \cdot \left(3h^2 \cdot \frac{dh}{dt} \right) \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\pi h^2}{4} \frac{dh}{dt} \end{aligned}$$

3. Análise do Instante Específico: O problema pede para encontrar $\frac{dh}{dt}$ no instante em que a profundidade da água é $h = 3$ m. Os dados são:

- A água é bombeada para fora, então o volume diminui: $\frac{dV}{dt} = -2$ m³/min.
- A profundidade no instante é $h = 3$ m.

4. Cálculo Final: Substituímos os valores conhecidos na equação que relaciona as taxas:

$$\begin{aligned} -2 &= \frac{\pi(3)^2}{4} \frac{dh}{dt} \\ -2 &= \frac{9\pi}{4} \frac{dh}{dt} \\ \frac{dh}{dt} &= -2 \cdot \frac{4}{9\pi} = -\frac{8}{9\pi} \text{ m/min} \end{aligned}$$

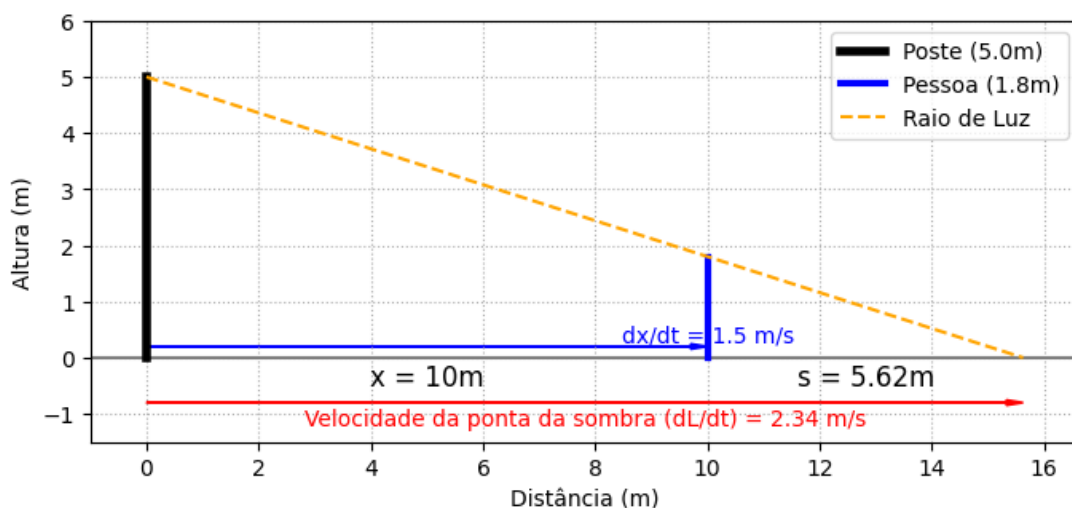
O sinal negativo indica que o nível da água está baixando. Portanto, a taxa com que o nível da água baixa é de $\frac{8}{9\pi}$ m/min.

12. Uma pessoa de 1,80 m de altura se afasta de um poste de luz de 5 m de altura a uma taxa de 1,5 m/s. A que taxa a ponta da sua sombra se move quando ela está a 10 metros do poste?

Solution: 1. Modelo Geométrico e Variáveis: Este problema é modelado usando dois triângulos retângulos semelhantes.

- O triângulo maior tem como catetos a altura do poste ($H = 5$ m) e a distância da base do poste até a ponta da sombra.
- O triângulo menor tem como catetos a altura da pessoa ($h = 1.8$ m) e o comprimento da sua sombra.

Seja x a distância da pessoa ao poste e s o comprimento da sombra. A base do triângulo maior é, portanto, $x + s$. A questão pede a velocidade da ponta da sombra, que é a taxa de variação da distância total $L = x + s$ em relação à base do poste, ou seja, $\frac{dL}{dt}$.



2. Equação de Semelhança: Pela propriedade de semelhança de triângulos, a razão entre as alturas e as bases dos dois triângulos é igual:

$$\frac{h}{s} = \frac{H}{x+s} \implies \frac{1.8}{s} = \frac{5}{x+s}$$

Multiplicando cruzado para simplificar a relação:

$$\begin{aligned} 1.8(x+s) &= 5s \\ 1.8x + 1.8s &= 5s \\ 1.8x &= 3.2s \end{aligned}$$

3. Derivação (Taxas): Derivamos a relação $1.8x = 3.2s$ implicitamente em relação ao tempo t :

$$1.8 \frac{dx}{dt} = 3.2 \frac{ds}{dt}$$

4. Cálculo das Taxas: Nos é dado que a pessoa se afasta do poste com $\frac{dx}{dt} = 1.5$ m/s. Podemos encontrar a taxa de crescimento da sombra, $\frac{ds}{dt}$:

$$1.8(1.5) = 3.2 \frac{ds}{dt} \implies 2.7 = 3.2 \frac{ds}{dt} \implies \frac{ds}{dt} = \frac{2.7}{3.2} = \frac{27}{32} \text{ m/s}$$

A velocidade da ponta da sombra é a soma das velocidades:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(x+s) = \frac{dx}{dt} + \frac{ds}{dt} = 1.5 + \frac{27}{32} = \frac{3}{2} + \frac{27}{32} = \frac{48+27}{32} = \frac{75}{32} \text{ m/s}$$

A taxa com que a ponta da sombra se move é de $\frac{75}{32} \approx 2.34$ m/s. É importante notar que essa taxa é constante e não depende da distância $x = 10$ m da pessoa ao poste.

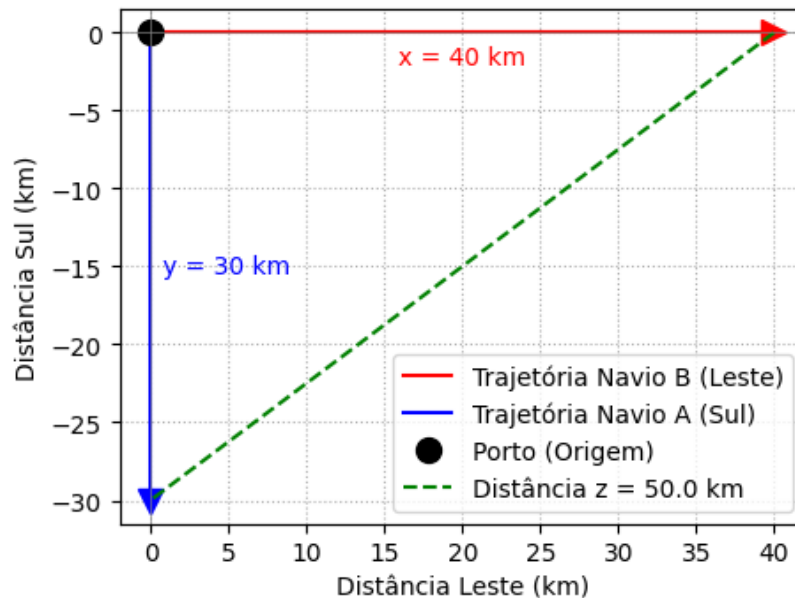
13. Dois navios partem do mesmo porto ao meio-dia. O navio A navega para o sul a 15 km/h e o navio B navega para o leste a 20 km/h. A que taxa a distância entre os navios está aumentando às 14h00?

Solution: 1. Modelo Geométrico e Variáveis: As trajetórias perpendiculares (sul e leste) dos navios a partir do mesmo porto formam os catetos de um triângulo retângulo. A distância direta entre os navios é a hipotenusa.

- Seja $y(t)$ a distância do navio A (sul) ao porto.
- Seja $x(t)$ a distância do navio B (leste) ao porto.
- Seja $z(t)$ a distância entre os navios.

Pelo Teorema de Pitágoras, a relação entre essas distâncias é:

$$x^2 + y^2 = z^2$$



2. Derivação (Taxas): Derivamos a equação implicitamente em relação ao tempo t para encontrar a relação entre as taxas:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) &= \frac{d}{dt}(z^2) \\ 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} &= 2z \frac{dz}{dt} \\ x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} &= z \frac{dz}{dt}\end{aligned}$$

3. Análise do Instante Específico (14h00): O instante de 14h00 ocorre $t = 2$ horas após a partida ao meio-dia.

- **Distâncias percorridas:**

- Navio A: $y = 15 \text{ km/h} \times 2 \text{ h} = 30 \text{ km}$.
- Navio B: $x = 20 \text{ km/h} \times 2 \text{ h} = 40 \text{ km}$.

- **Distância entre os navios (z):**

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{1600 + 900} = \sqrt{2500} = 50 \text{ km}$$

- **Taxas dadas:** $\frac{dy}{dt} = 15 \text{ km/h}$ e $\frac{dx}{dt} = 20 \text{ km/h}$.

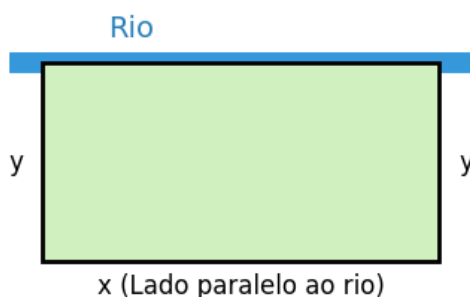
4. Cálculo Final: Substituímos todos os valores conhecidos na equação das taxas para encontrar $\frac{dz}{dt}$:

$$\begin{aligned}(40)(20) + (30)(15) &= 50 \cdot \frac{dz}{dt} \\ 800 + 450 &= 50 \frac{dz}{dt} \\ 1250 &= 50 \frac{dz}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{1250}{50} = 25 \text{ km/h}\end{aligned}$$

Portanto, às 14h00, a distância entre os navios está aumentando a uma taxa de **25 km/h**.

14. Um fazendeiro tem 2400 metros de cerca e quer cercar um campo retangular que faz fronteira com um rio reto, que não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem a maior área possível?

Solution: Este é um problema de otimização. O objetivo é encontrar as dimensões de um campo retangular que maximizam a área, dada uma restrição no perímetro da cerca.



1. Modelo, Variáveis e Equações: Seja x o comprimento do lado do campo paralelo ao rio e y o comprimento dos dois lados perpendiculares ao rio.

- **Função Objetivo (Área):** A função que queremos maximizar é a área $A = x \cdot y$.
- **Equação de Restrição (Cerca):** O total de cerca disponível é de 2400 metros, que cobrirá três lados do retângulo: $x + 2y = 2400$.

2. Expressar o Objetivo em uma Variável: Para otimizar a função de área, ela deve depender de apenas uma variável. Isolamos x na equação de restrição:

$$x = 2400 - 2y$$

Agora, substituimos essa expressão na função de área:

$$A(y) = (2400 - 2y) \cdot y = 2400y - 2y^2$$

As dimensões devem ser positivas, então

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \implies \overbrace{2400 - 2y}^x > 0 \implies y < 1200$$

Portanto, o domínio da nossa função é $y \in (0, 1200)$.

3. Encontrar o Ponto Crítico: Para encontrar o valor de y que maximiza $A(y)$, calculamos a primeira derivada e a igualamos a zero.

$$\frac{dA}{dy} = \frac{d}{dy}(2400y - 2y^2) = 2400 - 4y$$

Igualando a zero:

$$2400 - 4y = 0 \implies 4y = 2400 \implies y = 600 \text{ m}$$

4. Verificação de Máximo: Para confirmar que $y = 600$ corresponde a um máximo, usamos o teste da segunda derivada:

$$\frac{d^2 A}{dy^2} = -4$$

Como a segunda derivada é negativa, a função é côncava para baixo em todo o seu domínio, o que garante que o ponto crítico encontrado é um máximo global.

5. Dimensões Finais: Com o valor ótimo de y , encontramos o valor de x :

$$x = 2400 - 2(600) = 2400 - 1200 = 1200 \text{ m}$$

As dimensões que maximizam a área do campo são **1200 metros** (para o lado paralelo ao rio) por **600 metros**.

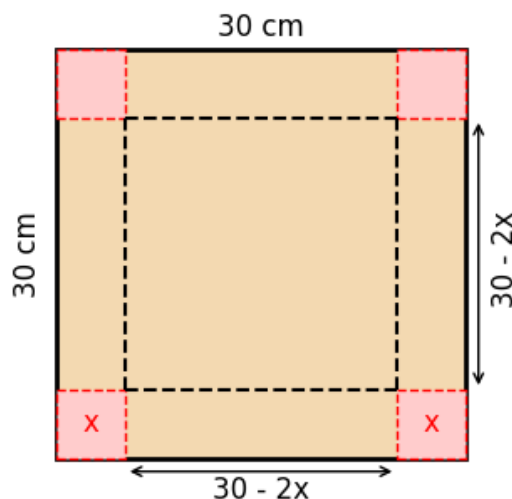
15. Uma caixa sem tampa deve ser feita de um pedaço quadrado de papelão, com 30 cm de lado, cortando-se quadrados iguais de cada canto e dobrando-se as laterais. Qual é o maior volume possível que essa caixa pode ter?

Solution: 1. Modelo, Variáveis e Função Objetivo: O problema consiste em encontrar o tamanho do corte, x , que maximiza o volume da caixa resultante.

- A folha original é um quadrado de 30 cm de lado.
- Cortamos um quadrado de lado x de cada canto.

- As dimensões da caixa sem tampa resultante serão:

- Altura: $h = x$
- Comprimento da base: $l = 30 - 2x$
- Largura da base: $w = 30 - 2x$



A função objetivo é o volume V , dado por $V = l \cdot w \cdot h$:

$$V(x) = (30 - 2x)(30 - 2x)x = x(30 - 2x)^2$$

2. Domínio da Função: Para que a caixa tenha dimensões físicas válidas, todas as medidas devem ser positivas: $x > 0$ e $30 - 2x > 0 \implies 30 > 2x \implies x < 15$. Portanto, o domínio de x é o intervalo $(0, 15)$.

3. Encontrar Pontos Críticos: Para facilitar a derivação, expandimos a função de volume:

$$V(x) = x(900 - 120x + 4x^2) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$$

Agora, calculamos a primeira derivada para encontrar os pontos críticos:

$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 240x + 900$$

Igualamos a derivada a zero e resolvemos a equação quadrática:

$$\begin{aligned} 12x^2 - 240x + 900 &= 0 \quad (\text{dividindo por } 12) \\ x^2 - 20x + 75 &= 0 \\ (x - 5)(x - 15) &= 0 \end{aligned}$$

Os pontos críticos são $x = 5$ e $x = 15$.

4. Análise e Verificação: O ponto crítico $x = 15$ está no limite do nosso domínio e resultaria em uma caixa com volume zero, portanto não é um máximo.

O único candidato viável é $x = 5$. Para verificar se é um máximo, usamos o teste da segunda derivada:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 240$$

Avaliando em $x = 5$:

$$V''(5) = 24(5) - 240 = 120 - 240 = -120$$

Como $V''(5) < 0$, a função é côncava para baixo em $x = 5$, confirmando que este ponto corresponde a um volume máximo.

5. Volume Máximo: Calculamos o volume usando $x = 5$:

$$V(5) = 5 \cdot (30 - 2(5))^2 = 5 \cdot (20)^2 = 5 \cdot 400 = 2000 \text{ cm}^3$$

O maior volume possível que a caixa pode ter é de **2000 cm³**.

16. Uma empresa estima que o custo de produção de x unidades de um produto específico é $C(x) = 2600 + 2x + 0.001x^2$. A receita $R(x) = x \cdot p(x)$ é dada pela relação de demanda $p(x) = 10 - 0.002x$, onde p é o preço por unidade. Sabendo que $L(x) = R(x) - C(x)$, encontre o nível de produção que maximizará o lucro.

Solution: 1. Formulação da Função Lucro: O lucro (L) é a diferença entre a receita (R) e o custo (C). Primeiro, precisamos construir a função de lucro $L(x)$.

- **Função de Custo (dada):** $C(x) = 2600 + 2x + 0.001x^2$.
- **Função de Receita:** A receita é o preço por unidade multiplicado pelo número de unidades.

$$R(x) = x \cdot p(x) = x(10 - 0.002x) = 10x - 0.002x^2$$

- **Função Lucro (Objetivo):**

$$\begin{aligned} L(x) &= R(x) - C(x) \\ L(x) &= (10x - 0.002x^2) - (2600 + 2x + 0.001x^2) \\ L(x) &= 10x - 0.002x^2 - 2600 - 2x - 0.001x^2 \\ L(x) &= -0.003x^2 + 8x - 2600 \end{aligned}$$

2. Encontrar o Ponto Crítico (Nível de Produção Ótimo): Para maximizar a função de lucro $L(x)$, calculamos sua primeira derivada (o lucro marginal) e a igualamos a zero.

$$\frac{dL}{dx} = \frac{d}{dx}(-0.003x^2 + 8x - 2600) = -0.006x + 8$$

Igualando a derivada a zero para encontrar o ponto crítico:

$$-0.006x + 8 = 0 \implies x = \frac{8}{0.006} = \frac{4000}{3} \approx 1333.33$$

3. Verificação de Máximo: Usamos o teste da segunda derivada para garantir que o ponto encontrado corresponde a um máximo.

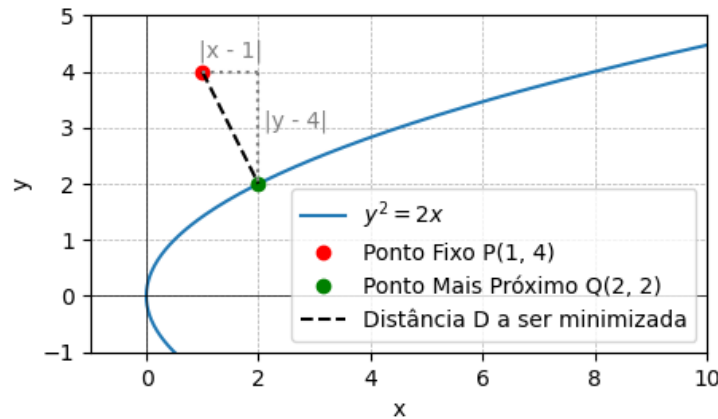
$$\frac{d^2L}{dx^2} = -0.006$$

Como a segunda derivada é negativa, a função de lucro é côncava para baixo, e o ponto crítico é um máximo global.

4. Conclusão: O nível de produção teórico que maximiza o lucro é de $x = \frac{4000}{3} \approx 1333.33$ unidades. Como o número de unidades deve ser inteiro, o nível de produção ótimo será o valor inteiro mais próximo, que é **1333 unidades**.

17. Encontre o ponto sobre a parábola $y^2 = 2x$ que está mais próximo do ponto $(1, 4)$.

Solution: 1. Formulação do Problema: O objetivo é minimizar a distância entre um ponto (x, y) na parábola $y^2 = 2x$ e o ponto fixo $(1, 4)$.



A distância D é dada por:

$$D = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 4)^2}$$

Para simplificar a derivação, podemos minimizar o quadrado da distância, $S = D^2$, pois o mínimo de D ocorre no mesmo ponto que o mínimo de S .

$$S(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 4)^2$$

2. Expressar o Objetivo em uma Variável: Usamos a equação da parábola, $y^2 = 2x$, para expressar x em função de y : $x = \frac{y^2}{2}$. Substituímos x na função S :

$$S(y) = \left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y - 4)^2$$

3. Encontrar o Ponto Crítico: Derivamos $S(y)$ em relação a y usando a Regra da Cadeia e igualamos a zero.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dy} &= \frac{d}{dy} \left[\left(\frac{y^2}{2} - 1 \right)^2 + (y - 4)^2 \right] \\ \frac{dS}{dy} &= 2 \left(\frac{y^2}{2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{2y}{2} \right) + 2(y - 4) \\ \frac{dS}{dy} &= (y^2 - 2) \cdot y + 2y - 8 \\ \frac{dS}{dy} &= y^3 - 2y + 2y - 8 = y^3 - 8\end{aligned}$$

Igualando a derivada a zero:

$$y^3 - 8 = 0 \implies y^3 = 8 \implies y = 2$$

4. Verificação de Mínimo: Calculamos a segunda derivada para classificar o ponto crítico:

$$\frac{d^2S}{dy^2} = 3y^2$$

Avaliando em $y = 2$: $S''(2) = 3(2)^2 = 12$. Como $S''(2) > 0$, o ponto corresponde a um mínimo.

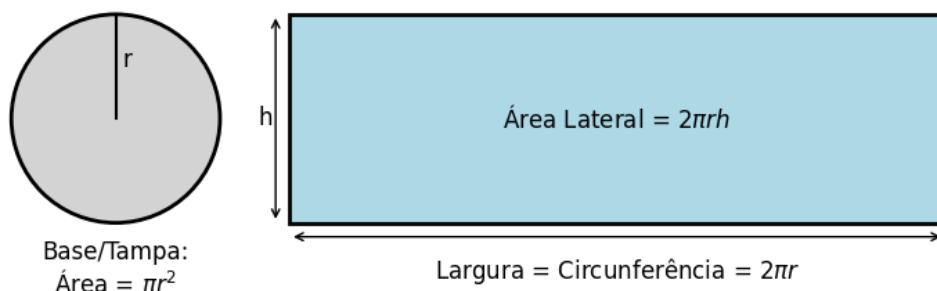
5. Coordenadas Finais: Com o valor ótimo de $y = 2$, encontramos a coordenada x correspondente:

$$x = \frac{y^2}{2} = \frac{(2)^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Portanto, o ponto na parábola mais próximo de $(1, 4)$ é **(2, 2)**.

18. Um fabricante precisa criar uma lata cilíndrica com tampa com volume de 1000 cm^3 (1 litro). Encontre o raio e a altura que minimizam a quantidade de metal utilizado.

Solution: 1. Modelo, Variáveis e Equações: O objetivo é minimizar a área da superfície de um cilindro com tampa, dado um volume fixo.



- Seja r o raio da base e h a altura do cilindro.
- **Função Objetivo (Área da Superfície):** A área total é a soma da área das duas bases circulares ($2\pi r^2$) com a área lateral ($2\pi rh$).

$$A(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

- **Equação de Restrição (Volume):** O volume deve ser de 1000 cm^3 .

$$V = \pi r^2 h = 1000$$

2. Expressar o Objetivo em uma Variável: Isolamos h na equação de restrição:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Substituímos essa expressão na função de área para que ela dependa apenas de r :

$$\begin{aligned} A(r) &= 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1000}{\pi r^2} \right) \\ A(r) &= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \end{aligned}$$

O domínio da função é $r > 0$.

3. Encontrar o Ponto Crítico: Derivamos $A(r)$ em relação a r . Para facilitar, reescrevemos $A(r) = 2\pi r^2 + 2000r^{-1}$.

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - 2000r^{-2} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

Igualamos a derivada a zero para encontrar o raio que minimiza a área:

$$\begin{aligned} 4\pi r - \frac{2000}{r^2} &= 0 \\ 4\pi r &= \frac{2000}{r^2} \\ 4\pi r^3 &= 2000 \\ r^3 &= \frac{2000}{4\pi} = \frac{500}{\pi} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \text{ cm} \end{aligned}$$

4. Verificação de Mínimo e Dimensões Finais: A segunda derivada é $\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + 4000r^{-3} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$. Como $r > 0$, a segunda derivada é sempre positiva, confirmando que o ponto crítico é um mínimo.

Para encontrar a altura ótima, usamos a relação $h = \frac{1000}{\pi r^2}$. No ponto crítico, temos $\pi r^3 = 500$, ou $1000 = 2\pi r^3$. Substituindo:

$$h = \frac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r$$

Este é um resultado clássico: o cilindro com a menor área de superfície para um dado volume é aquele cuja altura é igual ao seu diâmetro.

As dimensões que minimizam a quantidade de metal são:

- Raio: $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5.42$ cm.
- Altura: $h = 2r = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 10.84$ cm.

Análise de funções

19. Faça um estudo completo para cada uma das funções abaixo:

- | | |
|-----------------------------------|---|
| (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ | 1. Encontre o domínio da função |
| (b) $g(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ | 2. Calcule os pontos de intersecção com os eixos |
| (c) $h(x) = x^4 - 4x^3$ | 3. Encontre os pontos e os valores críticos |
| (d) $m(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ | 4. Determine (se possível) se a função é par ou ímpar |
| (e) $n(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$ | 5. Determine os intervalos de crescimento/decrescimento |
| (f) $p(x) = x \cdot e^{-x}$ | 6. Classifique os máximos e mínimos locais e globais |
| (g) $q(x) = x \cdot \ln x$ | 7. Determine os intervalos de concavidade e convexidade |
| (h) $r(x) = \sqrt{9 - x^2}$ | 8. Determine os pontos de inflexão |
| (i) $s(x) = x - 2 \sin x$ | 9. Encontre as assíntotas |
| | 10. Esboce o gráfico da função |

Solution:

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

1. **Domínio:** Sendo uma função polinomial, o domínio é $\mathbb{R}$.

2. **Interseções com os eixos:**

- Eixo y ($x = 0$): $f(0) = 4$. Ponto $(0, 4)$.
- Eixo x ($f(x) = 0$): $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$. As raízes são $x = -1$ e $x = 2$ (raiz dupla). Pontos $(-1, 0)$ e $(2, 0)$.

3. **Pontos Críticos:** Calculamos a primeira derivada.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Igualando a zero: $3x(x - 2) = 0 \implies x = 0$ ou $x = 2$. Os pontos críticos são $(0, f(0)) = (0, 4)$ e $(2, f(2)) = (2, 0)$.

4. **Simetria:** $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x^2 + 4$. A função não é par nem ímpar.
5. **Intervalos de Crescimento/Decrescimento:** Analisamos o sinal de $f'(x) = 3x(x - 2)$.
 - $f'(x) > 0$: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ (Função Crescente).
 - $f'(x) < 0$: $(0, 2)$ (Função Decrescente).
6. **Máximos e Mínimos Locais:**
 - Em $x = 0$, temos um **máximo local** no ponto $(0, 4)$.
 - Em $x = 2$, temos um **mínimo local** no ponto $(2, 0)$.

A função não possui extremos globais.

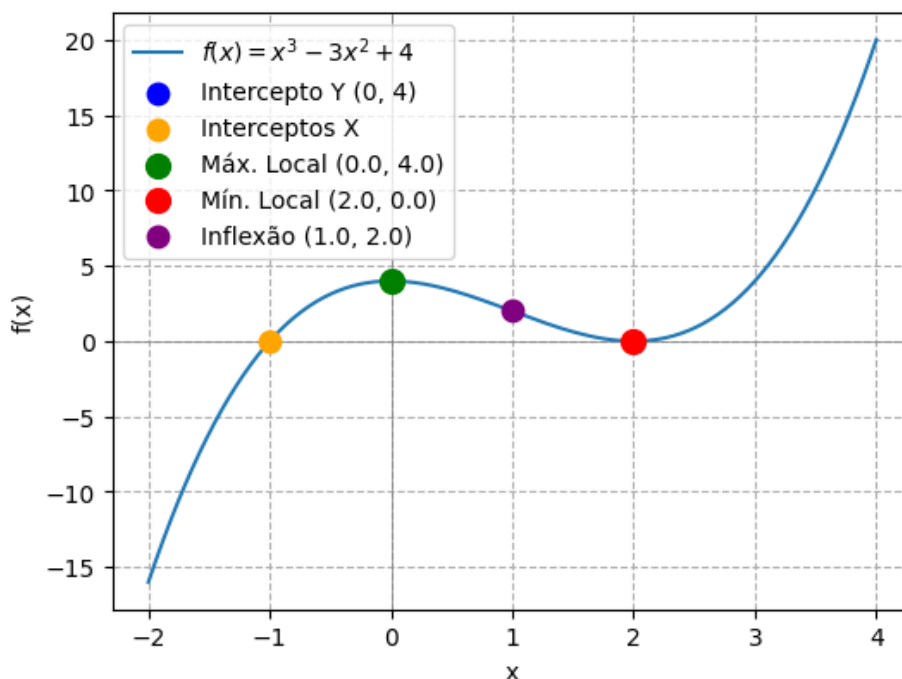
7. **Intervalos de Concavidade:** Calculamos a segunda derivada.

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f''(x) = 0 \implies 6x = 6 \implies x = 1$$

Analisamos o sinal de $f''(x)$:

- $f''(x) < 0$: $(-\infty, 1)$ (Côncava para baixo).
 - $f''(x) > 0$: $(1, \infty)$ (Côncava para cima).
8. **Ponto de Inflexão:** A concavidade muda em $x = 1$. O ponto de inflexão é $(1, f(1)) = (1, 2)$.
 9. **Assíntotas:** Não há assíntotas, pois é uma função polinomial.
 10. **Esboço do Gráfico:**



(b) $g(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

1. **Domínio:** Sendo uma função polinomial, o domínio é $\mathbb{R}$.

2. **Interseções com os eixos:**

- Eixo y ($x = 0$): $g(0) = 3$. Ponto $(0, 3)$.
- Eixo x ($g(x) = 0$): $x^4 - 2x^2 + 3 = 0$. Fazendo $u = x^2$, temos $u^2 - 2u + 3 = 0$. O discriminante $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$, logo não existem raízes reais. A função não cruza o eixo x.

3. **Pontos Críticos:** Calculamos a primeira derivada.

$$g'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

Igualando a zero: $4x(x - 1)(x + 1) = 0 \implies x = 0, x = 1$ ou $x = -1$.
Os pontos críticos são $(0, 3)$, $(1, 2)$ e $(-1, 2)$.

4. **Simetria:** $g(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 3 = x^4 - 2x^2 + 3 = g(x)$. A função é **par**.

5. **Intervalos de Crescimento/Decrescimento:** Analisamos o sinal de $g'(x)$.

- $g'(x) > 0$: $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ (Função Crescente).
- $g'(x) < 0$: $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ (Função Decrescente).

6. **Máximos e Mínimos:**

- Em $x = -1$ e $x = 1$, temos **mínimos locais e globais** nos pontos $(-1, 2)$ e $(1, 2)$.
- Em $x = 0$, temos um **máximo local** no ponto $(0, 3)$.

7. **Intervalos de Concavidade:** Calculamos a segunda derivada.

$$g''(x) = 12x^2 - 4$$

$$g''(x) = 0 \implies x^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \implies x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

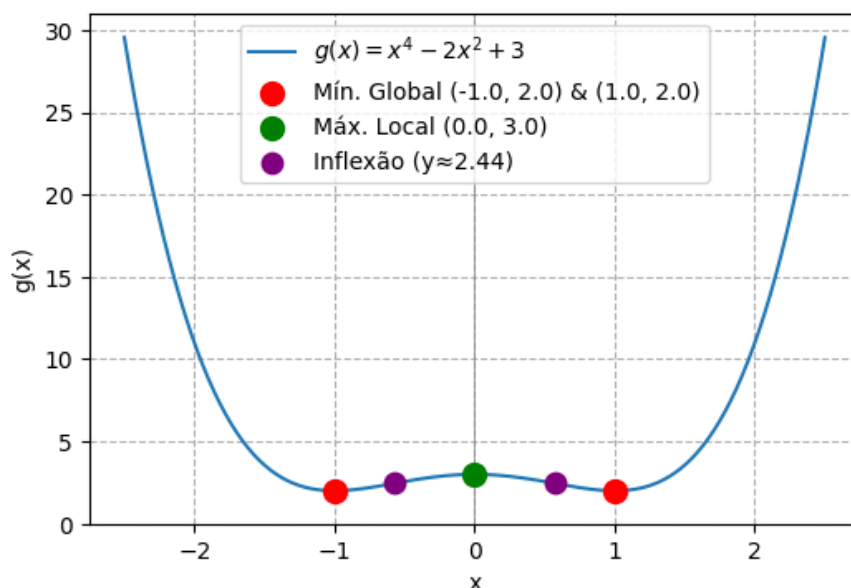
Analizamos o sinal de $g''(x)$:

- $g''(x) < 0$: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (Côncava para baixo).
- $g''(x) > 0$: $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ (Côncava para cima).

8. **Pontos de Inflexão:** A concavidade muda em $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. O valor de g nestes pontos é $\frac{22}{9}$. Os pontos são $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{22}{9}\right)$.

9. **Assíntotas:** Por ser uma função polinomial, não há assíntotas.

10. Esboço do Gráfico:

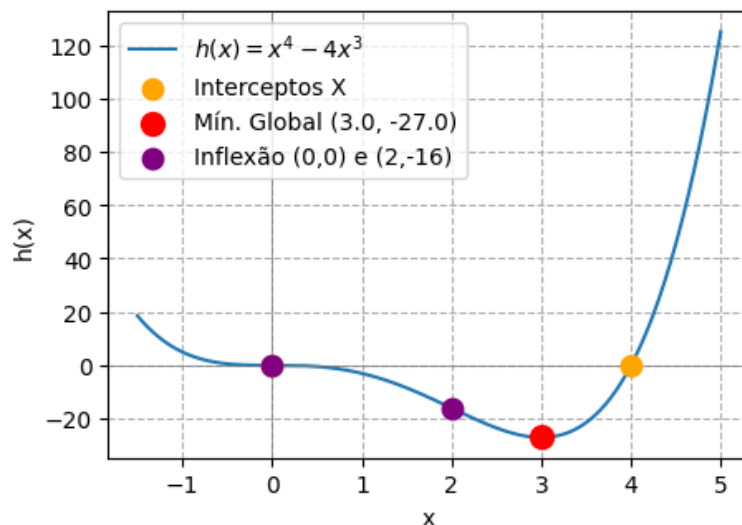


(c) $h(x) = x^4 - 4x^3$

1. **Domínio:** A função é polinomial, logo, o domínio é $\mathbb{R}$.
2. **Interseções com os eixos:**
 - Eixo y ($x = 0$): $h(0) = 0$. O gráfico passa pela origem $(0, 0)$.
 - Eixo x ($h(x) = 0$): $x^4 - 4x^3 = x^3(x - 4) = 0$. As raízes são $x = 0$ (raiz tripla) e $x = 4$. Pontos $(0, 0)$ e $(4, 0)$.
3. **Pontos Críticos:** $h'(x) = 4x^3 - 12x^2$. Igualando a zero: $4x^2(x - 3) = 0 \implies x = 0$ ou $x = 3$. Os pontos críticos são $(0, h(0)) = (0, 0)$ e $(3, h(3)) = (3, -27)$.
4. **Simetria:** $h(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 = x^4 + 4x^3$. A função não é par nem ímpar.
5. **Intervalos de Crescimento/Decrescimento:** Analisando o sinal de $h'(x) = 4x^2(x - 3)$.
 - $h'(x) < 0$: $(-\infty, 3)$ (Função Decrescente).
 - $h'(x) > 0$: $(3, \infty)$ (Função Crescente).
6. **Máximos e Mínimos Locais e Globais:**
 - Em $x = 0$, a função não muda de sentido de crescimento, portanto não é um extremo local.
 - Em $x = 3$, temos um **mínimo global** no ponto $(3, -27)$.
7. **Intervalos de Concavidade:** $h''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$.
 - $h''(x) > 0$: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ (Côncava para cima).
 - $h''(x) < 0$: $(0, 2)$ (Côncava para baixo).
8. **Pontos de Inflexão:** A concavidade muda em $x = 0$ e $x = 2$. $h(0) = 0$ e $h(2) = 16 - 32 = -16$. Os pontos de inflexão são **$(0, 0)$** e **$(2, -16)$** .

9. **Assíntotas:** Não há assíntotas.

10. **Esboço do Gráfico:**



(d) $m(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

1. **Domínio:** O denominador $x^2 + 1$ é sempre positivo, ou seja, nunca se anula. Portanto, o domínio é $\mathbb{R}$.

2. **Interseções com os eixos:**

- Eixo y ($x = 0$): $m(0) = 0$.
- Eixo x ($m(x) = 0$): $\frac{x}{x^2 + 1} = 0 \implies x = 0$.

O único ponto de interseção é a origem $(0, 0)$.

3. **Pontos Críticos:** Usamos a Regra do Quociente para encontrar $m'(x)$.

$$m'(x) = \frac{(1)(x^2 + 1) - (x)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$m'(x) = 0$ quando $1 - x^2 = 0$, o que nos dá $x = -1$ e $x = 1$. Os pontos críticos são $(-1, m(-1)) = (-1, -1/2)$ e $(1, m(1)) = (1, 1/2)$.

4. **Simetria:** $m(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1} = -m(x)$. Função **ímpar**.

5. **Intervalos de Crescimento/Decrescimento:** O sinal de $m'(x)$ é determinado pelo numerador $1 - x^2$.

- $m'(x) < 0$: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ (Função Decrescente).
- $m'(x) > 0$: $(-1, 1)$ (Função Crescente).

6. **Máximos e Mínimos:**

- Em $x = -1$, temos um **mínimo global** no ponto $(-1, -1/2)$.
- Em $x = 1$, temos um **máximo global** no ponto $(1, 1/2)$.

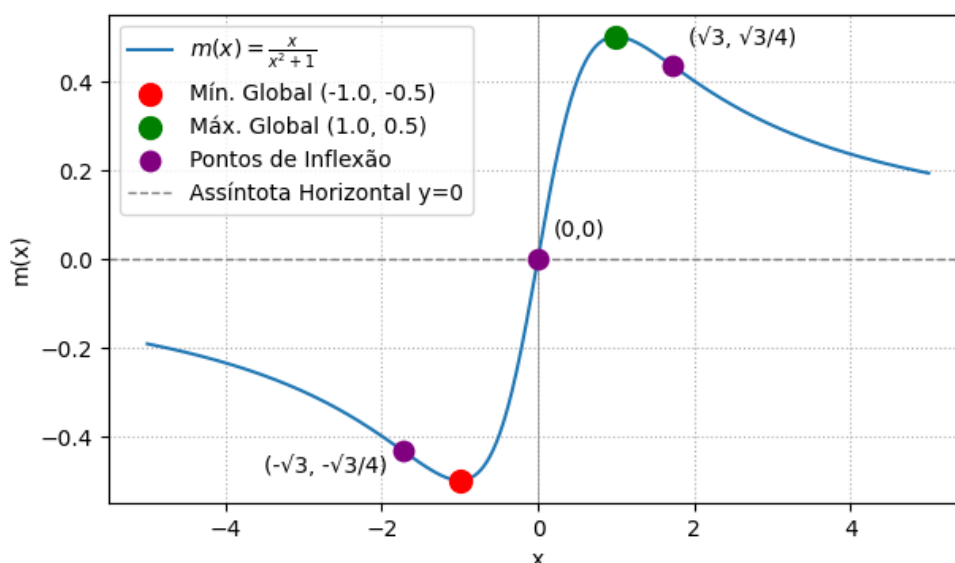
7. **Intervalos de Concavidade:** $m''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$, portanto, o sinal é determinado por $2x(x^2 - 3)$, cujas raízes são $x = 0, x = \pm\sqrt{3}$.

- $m''(x) > 0$: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ (Côncava para cima).
- $m''(x) < 0$: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ (Côncava para baixo).

8. **Pontos de Inflexão:** A concavidade muda em $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$. Os pontos são $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ e $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

9. **Assíntotas:** Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$, há uma **assíntota horizontal** em $y = 0$. Não há assíntotas verticais.

10. **Esboço do Gráfico:**



(e) $n(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

1. **Domínio:** O denominador $x^2 - 1$ não pode ser zero. Portanto, $x \neq \pm 1$. O domínio é $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
2. **Interseções com os eixos:** A função é zero se e somente se $2x^2 = 0$, o que ocorre em $x = 0$. A única interseção com os eixos é a origem $(0, 0)$.
3. **Pontos Críticos:** Usando a Regra do Quociente:

$$n'(x) = \frac{(4x)(x^2 - 1) - (2x^2)(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{4x^3 - 4x - 4x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$n'(x) = 0$ quando $-4x = 0 \implies x = 0$. O único ponto crítico é $(0, n(0)) = (0, 0)$.

4. **Simetria:** $n(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{2x^2}{x^2 - 1} = n(x)$. A função é **par**.
5. **Intervalos de Crescimento/Decrescimento:** O sinal de $n'(x)$ depende do numerador $-4x$.
 - $n'(x) > 0$: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ (Função Crescente).
 - $n'(x) < 0$: $(0, 1) \cup (1, \infty)$ (Função Decrescente).

6. **Máximos e Mínimos:** Em $x = 0$, temos um **máximo local** no ponto $(0, 0)$. Não há mínimos locais nem extremos globais.

7. **Intervalos de Concavidade:** $n''(x) = \frac{4(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$, portanto, o sinal é determinado pelo denominador $(x^2 - 1)^3$.

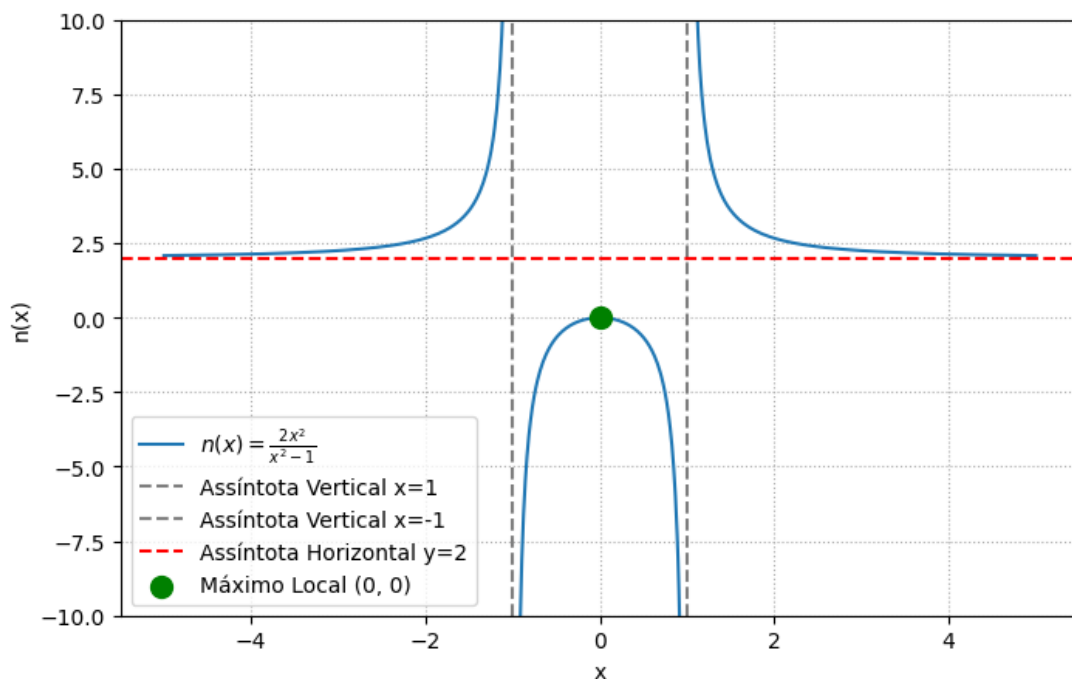
- $n''(x) > 0$: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ (Côncava para cima).
- $n''(x) < 0$: $(-1, 1)$ (Côncava para baixo).

8. **Pontos de Inflexão:** A segunda derivada nunca é zero. A concavidade muda nas assíntotas, onde a função não está definida. Logo, **não há pontos de inflexão**.

9. **Assíntotas:**

- **Verticais:** Ocorrem onde o denominador é zero: $x = -1$ e $x = 1$.
- **Horizontal:** Como os graus do numerador e denominador são iguais, a assíntota é a razão dos coeficientes líderes: $y = \frac{2}{1} = 2$.

10. **Esboço do Gráfico:**



(f) $p(x) = xe^{-x}$

1. **Domínio:** A função é definida para todos os números reais. $D = \mathbb{R}$.
2. **Interseções com os eixos:** A única interseção com ambos os eixos é a origem $(0, 0)$.
3. **Pontos Críticos:** Usando a Regra do Produto:

$$p'(x) = (1)e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$$

$$p'(x) = 0 \text{ quando } 1 - x = 0 \implies x = 1.$$

Portanto, o ponto crítico é $(1, p(1)) = (1, 1/e)$.

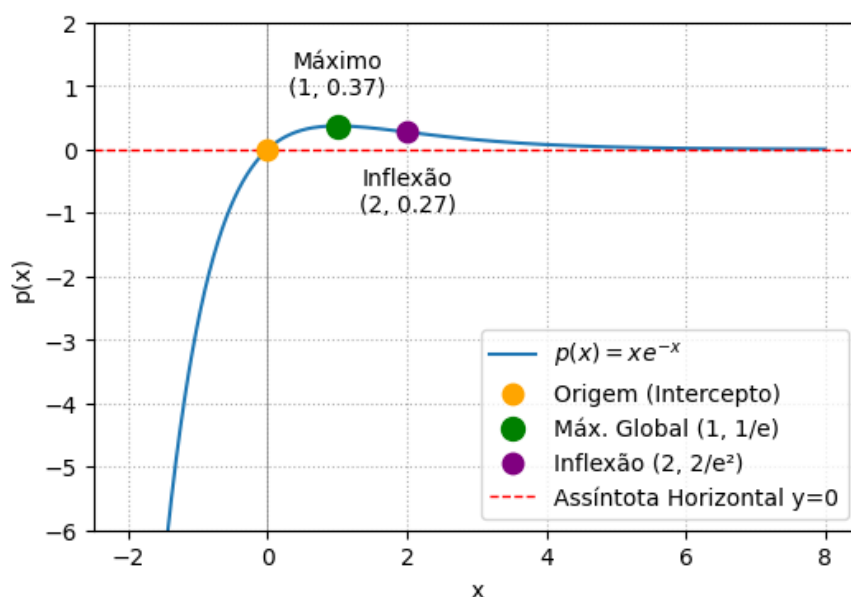
4. **Simetria:** $p(-x) = -xe^x$. A função não é par nem ímpar.
5. **Intervalos de Crescimento/Decrescimento:** O sinal de $p'(x)$ é determinado por $(1 - x)$.
 - $p'(x) > 0$: $(-\infty, 1)$ (Função Crescente).
 - $p'(x) < 0$: $(1, \infty)$ (Função Decrescente).
6. **Máximos e Mínimos:** Em $x = 1$, temos um **máximo local** e também **global** no ponto $(1, 1/e)$. Não há mínimo global.
7. **Intervalos de Concavidade:** Usando a Regra do Produto em $p'(x)$:

$$p''(x) = (-e^{-x})(1 - x) + (e^{-x})(-1) = e^{-x}(-1 + x - 1) = e^{-x}(x - 2)$$

O sinal de $p''(x)$ é determinado por $(x - 2)$.

- $p''(x) < 0$: $(-\infty, 2)$ (Côncava para baixo).
 - $p''(x) > 0$: $(2, \infty)$ (Côncava para cima).
8. **Ponto de Inflexão:** A concavidade muda em $x = 2$. O ponto de inflexão é $(2, p(2)) = (2, 2e^{-2})$.
 9. **Assíntotas:** $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$. Há uma **assíntota horizontal** em $y = 0$ quando $x \rightarrow \infty$. Não há assíntotas verticais.

10. Esboço do Gráfico:



(g) $q(x) = x \ln x$

1. **Domínio:** A função $\ln x$ exige $x > 0$, portanto, o domínio é $D = (0, \infty)$.
2. **Interseções com os eixos:**
 - Eixo y: Não há, pois $x = 0$ não está no domínio.
 - Eixo x ($q(x) = 0$): $x \ln x = 0 \implies \ln x = 0 \implies x = 1$. Portanto, o ponto é $(1, 0)$.

3. **Pontos Críticos:** Usando a Regra do Produto:

$$q'(x) = (1)(\ln x) + x \left(\frac{1}{x} \right) = \ln x + 1$$

$q'(x) = 0 \implies \ln x = -1 \implies x = e^{-1} = 1/e$. O ponto crítico é $(1/e, q(1/e)) = (1/e, -1/e)$.

4. **Simetria:** O domínio não é simétrico em relação à origem, portanto a função não é par nem ímpar.

5. **Intervalos de Crescimento/Decrescimento:** Analisando o sinal de $q'(x) = \ln x + 1$.

- $q'(x) < 0$: $(0, 1/e)$ (Função Decrescente).
- $q'(x) > 0$: $(1/e, \infty)$ (Função Crescente).

6. **Máximos e Mínimos:** Em $x = 1/e$, temos um **mínimo local** e também **global** no ponto $(1/e, -1/e)$. Não há máximo.

7. **Intervalos de Concavidade:** A segunda derivada é:

$$q''(x) = \frac{d}{dx}(\ln x + 1) = \frac{1}{x}$$

Como o domínio é $x > 0$, $q''(x)$ é sempre positiva. A função é **concava para cima** em todo o seu domínio.

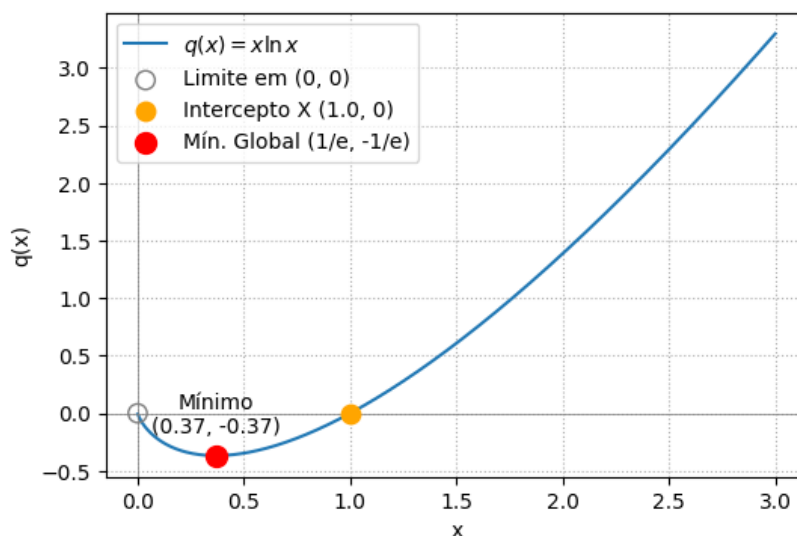
8. **Pontos de Inflexão:** Como $q''(x)$ nunca é zero e nunca muda de sinal no domínio, **não há pontos de inflexão**.

9. **Assíntotas:** Analisamos o comportamento nos extremos do domínio.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln x = \infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$.

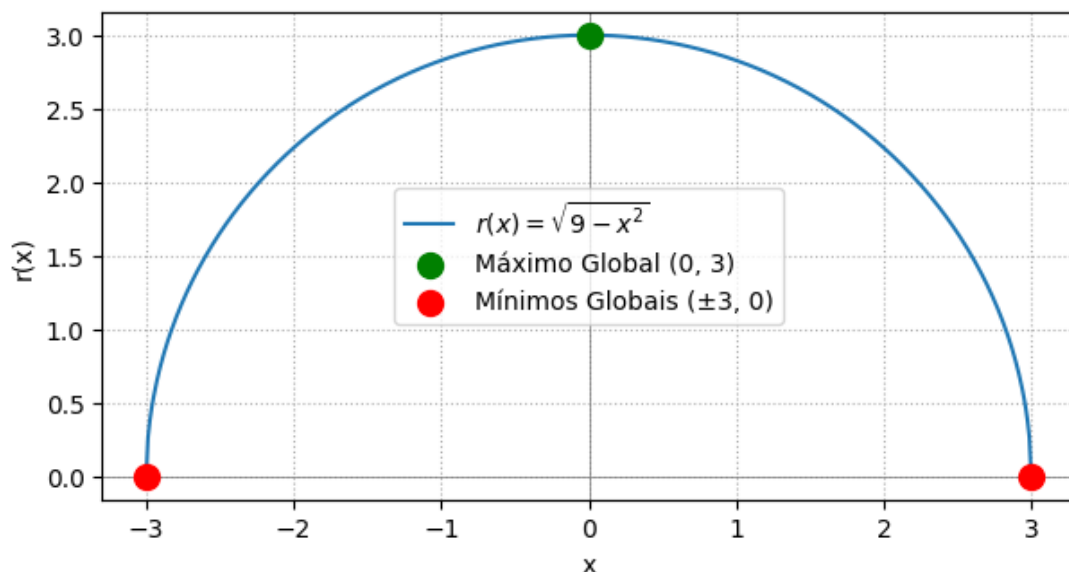
Como os limites não tendem a $\pm\infty$ em um ponto finito (para assíntota vertical) e não tendem a um valor finito em $\pm\infty$ (para assíntota horizontal), **não há assíntotas**.

10. **Esboço do Gráfico:**



(h) $r(x) = \sqrt{9 - x^2}$

1. **Domínio:** A expressão sob a raiz deve ser não-negativa: $9 - x^2 \geq 0 \implies x^2 \leq 9$. O domínio é $D = [-3, 3]$.
2. **Interseções com os eixos:**
 - Eixo y ($x = 0$): $r(0) = \sqrt{9} = 3$. Ponto $(0, 3)$.
 - Eixo x ($r(x) = 0$): $9 - x^2 = 0 \implies x = \pm 3$. Pontos $(-3, 0)$ e $(3, 0)$.
3. **Pontos Críticos:** $r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{9 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}$. $r'(x) = 0$ em $x = 0$. A derivada não existe em $x = \pm 3$ (pontos extremos do domínio). Os pontos críticos são $x \in \{-3, 0, 3\}$.
4. **Simetria:** $r(-x) = \sqrt{9 - (-x)^2} = \sqrt{9 - x^2} = r(x)$. A função é **par**.
5. **Intervalos de Crescimento/Decrescimento:** O sinal de $r'(x)$ é o oposto do sinal de x .
 - $r'(x) > 0$: $(-3, 0)$ (Função Crescente).
 - $r'(x) < 0$: $(0, 3)$ (Função Decrescente).
6. **Máximos e Mínimos:**
 - Em $x = 0$, temos um **máximo local e global** no ponto $(0, 3)$.
 - Em $x = -3$ e $x = 3$, temos **mínimos locais e globais** nos pontos $(-3, 0)$ e $(3, 0)$.
7. **Intervalos de Concavidade:** $r''(x) = \frac{-9}{(9 - x^2)^{3/2}}$, portanto $\forall x \in (-3, 3)$ temos que $r''(x) < 0$. A função é **côncava para baixo** em todo o intervalo $(-3, 3)$.
8. **Pontos de Inflexão:** Como a concavidade nunca muda, **não há pontos de inflexão**.
9. **Assíntotas:** O domínio é um intervalo fechado, portanto **não há assíntotas**.
10. **Esboço do Gráfico:**



(i) $s(x) = x - 2 \sin x$

1. **Domínio:** A função é definida para todos os números reais. $D = \mathbb{R}$.

2. **Interseções com os eixos:**

- Eixo y ($x = 0$): $s(0) = 0$. A interseção é a origem $(0, 0)$.
- Eixo x ($s(x) = 0$): $x = 2 \sin x$. Além de $x = 0$, existem outras raízes (e.g., $x \approx \pm 1.8955$), que são encontradas por métodos numéricos.

3. **Pontos Críticos:** $s'(x) = 1 - 2 \cos x$. $s'(x) = 0 \implies \cos x = \frac{1}{2}$. As soluções são da forma $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4. **Simetria:** $s(-x) = -x - 2 \sin(-x) = -x + 2 \sin x = -s(x)$. A função é ímpar.

5. **Intervalos de Crescimento/Decrescimento:** Analisando o sinal de $s'(x) = 1 - 2 \cos x$.

- Crescente $\left(s'(x) > 0 \iff \cos x < \frac{1}{2} \right)$
dentro do intervalo $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right)$
- Decrescente $\left(s'(x) < 0 \iff \cos x > \frac{1}{2} \right)$:
dentro do intervalo $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right)$

6. **Máximos e Mínimos Locais:**

- **Mínimos locais** em $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Ex: $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \right)$.
- **Máximos locais** em $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Ex: $\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3} \right)$.

Não há extremos globais.

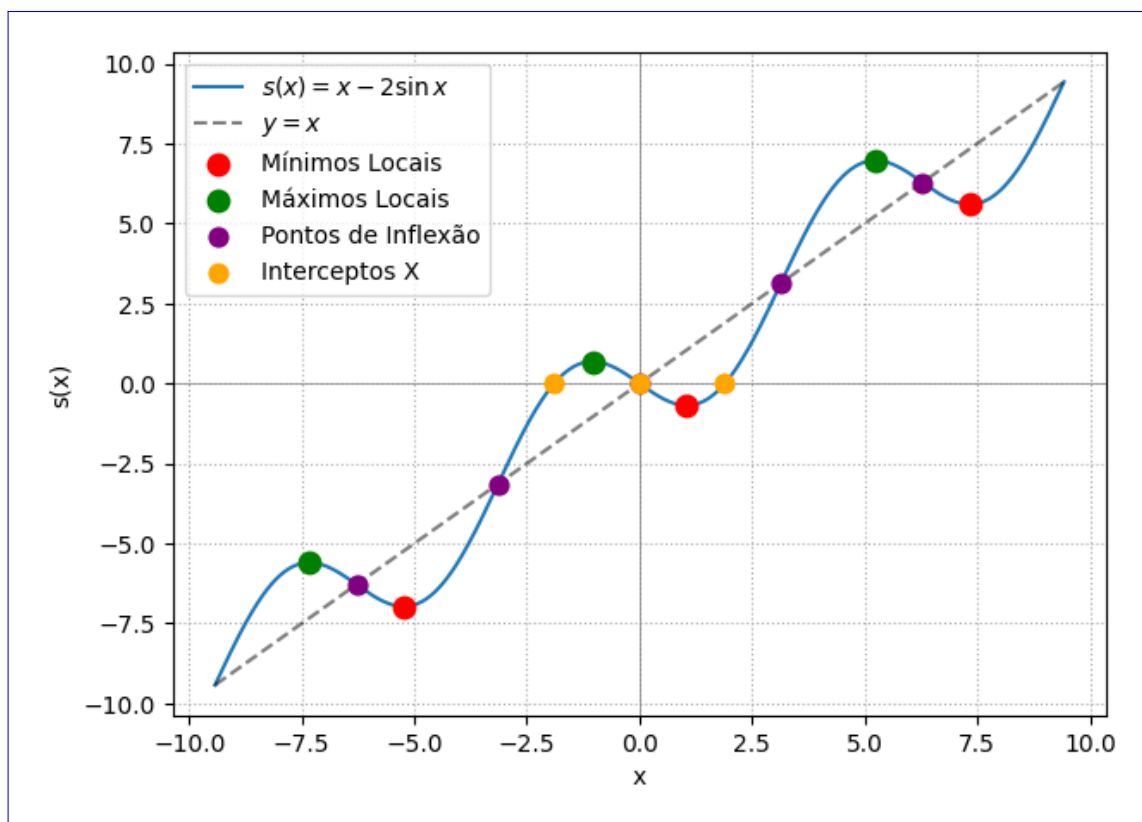
7. **Intervalos de Concavidade:** $s''(x) = 2 \sin x$.

- Côncava para cima ($s''(x) > 0$): em $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$.
- Côncava para baixo ($s''(x) < 0$): em $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$.

8. **Pontos de Inflexão:** Ocorrem quando $s''(x) = 0 \implies \sin x = 0$, ou seja, $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Os pontos de inflexão são da forma $(k\pi, s(k\pi)) = (k\pi, k\pi)$ e ocorrem sobre a reta $y = x$.

9. **Assíntotas:** Não há assíntotas. A função cresce e decresce de forma ilimitada, oscilando em torno da reta $y = x$.

10. **Esboço do Gráfico:**



20. Considere a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ no intervalo $[1, 3]$.

- Verifique que as três condições do Teorema de Rolle são satisfeitas.
- Encontre todos os números c no intervalo $(1, 3)$ tais que $f'(c) = 0$.

Solution:

(a) Para verificar as três condições do Teorema de Rolle para $f(x) = x^2 - 4x + 3$ no intervalo $[1, 3]$:

- Continuidade em $[1, 3]$:** A função $f(x)$ é um polinômio, e todo polinômio é contínuo em $\mathbb{R}$. Portanto, $f(x)$ é contínua no intervalo fechado $[1, 3]$. A condição está satisfeita.
- Diferenciabilidade em $(1, 3)$:** A derivada da função é $f'(x) = 2x - 4$. Esta derivada existe para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $f(x)$ é diferenciável no intervalo aberto $(1, 3)$. A condição está satisfeita.
- Igualdade nos extremos $f(1) = f(3)$:** Calculamos os valores da função nos pontos extremos do intervalo:
 - $f(1) = (1)^2 - 4(1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$.
 - $f(3) = (3)^2 - 4(3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$.

Como $f(1) = f(3)$, a condição está satisfeita.

Todas as três condições do Teorema de Rolle são satisfeitas.

- (b) O Teorema de Rolle garante a existência de pelo menos um número c no intervalo $(1, 3)$ tal que $f'(c) = 0$. Para encontrá-lo, usamos a derivada:

$$\begin{aligned} f'(c) &= 2c - 4 \\ \Downarrow \\ 2c - 4 &= 0 \\ 2c &= 4 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

O valor $c = 2$ está contido no intervalo $(1, 3)$, como exigido pelo teorema.

21. Considere a função $g(x) = x^3 - x$ no intervalo $[0, 2]$.

- (a) Verifique que a função satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio.
 (b) Encontre todos os números c no intervalo $(0, 2)$ que satisfazem a conclusão do teorema, ou seja, onde $g'(c) = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0}$.

Solution:

- (a) Para verificar as hipóteses do Teorema do Valor Médio (TVM) para $g(x) = x^3 - x$ no intervalo $[0, 2]$:

1. **Continuidade em $[0, 2]$:** A função $g(x)$ é um polinômio, que é contínuo em todo $\mathbb{R}$. Portanto, é contínua em $[0, 2]$. A hipótese está satisfeita.
2. **Diferenciabilidade em $(0, 2)$:** A derivada $g'(x) = 3x^2 - 1$ é um polinômio e existe para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $g(x)$ é diferenciável em $(0, 2)$. A hipótese está satisfeita.

Como ambas as hipóteses são satisfeitas, o TVM se aplica.

- (b) O TVM garante a existência de um $c \in (0, 2)$ tal que $g'(c)$ é igual à taxa de variação média no intervalo. Primeiro, calculamos a taxa de variação média (inclinação da reta secante):

$$\frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{(2^3 - 2) - (0^3 - 0)}{2} = \frac{6 - 0}{2} = 3$$

Agora, encontramos c resolvendo $g'(c) = 3$:

$$\begin{aligned} 3c^2 - 1 &= 3 \\ 3c^2 &= 4 \\ c^2 &= \frac{4}{3} \\ c &= \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

O valor que pertence ao intervalo $(0, 2)$ é a raiz positiva, $c = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

22. Explique por que a função $h(x) = \frac{1}{x-1}$ no intervalo $[0, 2]$ não satisfaz as condições do Teorema do Valor Médio.

Solution: O Teorema do Valor Médio (TVM) possui duas hipóteses que devem ser satisfeitas para que sua conclusão seja válida:

1. A função deve ser contínua no intervalo fechado $[a, b]$.
2. A função deve ser diferenciável no intervalo aberto (a, b) .

Analisamos a função $h(x) = \frac{1}{x-1}$ no intervalo $[0, 2]$.

1. Análise da Continuidade: $h(x)$ é uma função racional. Funções racionais são contínuas em todo o seu domínio. O domínio de $h(x)$ exclui os pontos onde o denominador é zero.

$$x - 1 = 0 \implies x = 1$$

A função possui uma descontinuidade infinita (uma assíntota vertical) em $x = 1$.

2. Conclusão: O ponto de descontinuidade, $x = 1$, pertence ao intervalo fechado $[0, 2]$. Como a função não é contínua em todo o intervalo $[0, 2]$, a primeira hipótese do Teorema do Valor Médio falha.

Portanto, a função $h(x) = \frac{1}{x-1}$ no intervalo $[0, 2]$ não satisfaz as condições do Teorema do Valor Médio porque ela não é contínua em $x = 1$. (Note que, conseqüentemente, ela também não é diferenciável em $x = 1$, falhando também a segunda hipótese).

23. Um carro de corrida completa uma volta de 6 km em 2 minutos. Utilize o Teorema do Valor Médio para mostrar que, em algum momento durante a volta, a velocidade instantânea do carro era exatamente 180 km/h.

Solution: Este problema é uma aplicação direta do Teorema do Valor Médio (TVM) a um cenário físico.

1. Modelagem do Problema: Vamos definir uma função $s(t)$ que representa a distância percorrida pelo carro (em km) desde o início da volta, em função do tempo t (em horas).

- O intervalo de tempo começa em $t = 0$ h e termina em $t = 2 \text{ min} = \frac{2}{60} \text{ h} = \frac{1}{30} \text{ h}$. Nosso intervalo é $[0, 1/30]$.
- No início, a distância percorrida é zero: $s(0) = 0$ km.
- No final da volta, a distância percorrida é de 6 km: $s(1/30) = 6$ km.

2. Verificação das Hipóteses do TVM:

1. **Continuidade:** A posição de um objeto em movimento é uma função contínua do tempo. O carro não pode saltar de um ponto a outro instantaneamente. Portanto, $s(t)$ é contínua em $[0, 1/30]$.
2. **Diferenciabilidade:** A velocidade instantânea do carro, $s'(t)$, existe em cada momento da volta. Assumimos que o movimento é "suave". Portanto, $s(t)$ é diferenciável em $(0, 1/30)$.
3. **Aplicação da Conclusão do TVM:** Como as duas hipóteses são satisfeitas, o TVM garante que existe pelo menos um instante de tempo c no intervalo $(0, 1/30)$ em que a velocidade instantânea $s'(c)$ é igual à velocidade média do carro durante a volta.
4. **Cálculo da Velocidade Média:** A velocidade média é a variação da distância dividida pela variação do tempo:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{s(1/30) - s(0)}{1/30 - 0} = \frac{6 \text{ km} - 0 \text{ km}}{1/30 \text{ h}} = 6 \times 30 \text{ km/h} = 180 \text{ km/h}$$

5. **Conclusão Final:** De acordo com o Teorema do Valor Médio, como a velocidade média do carro durante a volta foi de 180 km/h, deve existir pelo menos um instante c em que a velocidade instantânea do carro foi exatamente **180 km/h**.

Aplicações de derivada

24. Calcule os seguintes limites usando a Regra de L'Hôpital quando apropriado.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$

Solution:

- (a) O limite é da forma $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(e^x - 1)}{\frac{d}{dx}(\sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{e^0}{\cos 0} = 1$$

(b) O limite é da forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

(c) O limite é da forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos L'Hôpital duas vezes:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

(d) O limite é da forma $0 \cdot (-\infty)$. Reescrevemos para a forma $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0$$

(e) O limite é da forma $\infty - \infty$. Combinamos os termos em uma única fração (forma $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x}$$

O resultado ainda é $\frac{0}{0}$. Aplicamos L'Hôpital novamente:

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2 - 0} = 0$$

(f) O limite é da forma 1^∞ . Usamos a técnica do logaritmo. Seja L o limite.

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left((1+x)^{1/x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Este limite é da forma $\frac{0}{0}$. Aplicando L'Hôpital:

$$\ln L \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/(1+x)}{1} = 1$$

Como $\ln L = 1$, então $L = e^1 = e$.

(g) O limite é da forma 0^0 . Usamos a técnica do logaritmo. Seja L o limite.

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left((\sin x)^x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\sin x)$$

Este limite é da forma $0 \cdot (-\infty)$. Reescrevemos e aplicamos L'Hôpital:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{1/x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 \cos x}{\sin x}$$

Ainda é da forma $\frac{0}{0}$. Aplicamos L'Hôpital novamente:

$$\ln L \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x \cos x + x^2 \sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

Como $\ln L = 0$, então $L = e^0 = 1$.

25. Considere a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em torno do ponto $a = 8$
- Utilize aproximação linear para estimar $f(8.1)$ e calcule o erro.
 - Utilize aproximação quadrática para estimar $f(8.1)$ e calcule o erro.
 - Verifique graficamente a função e as aproximações na região.

Solution: Calculamos as derivadas da função $f(x) = x^{1/3}$ e seus valores no ponto $a = 8$.

- $f(x) = x^{1/3} \implies f(8) = 2$
- $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \implies f'(8) = \frac{1}{3(8^{2/3})} = \frac{1}{12}$
- $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} \implies f''(8) = -\frac{2}{9(8^{5/3})} = -\frac{1}{144}$

O valor real de $f(8.1) = \sqrt[3]{8.1} \approx 2.00829885$.

(a) **Aproximação Linear** $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

$$L(x) = 2 + \frac{1}{12}(x - 8)$$

Para $x = 8.1$:

$$L(8.1) = 2 + \frac{1}{12}(8.1 - 8) = 2 + \frac{0.1}{12} = 2 + \frac{1}{120} \approx 2.00833333$$

O erro é: $|f(8.1) - L(8.1)| \approx |2.00829885 - 2.00833333| \approx 3.45 \times 10^{-5}$.

(b) **Aproximação Quadrática** $P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$.

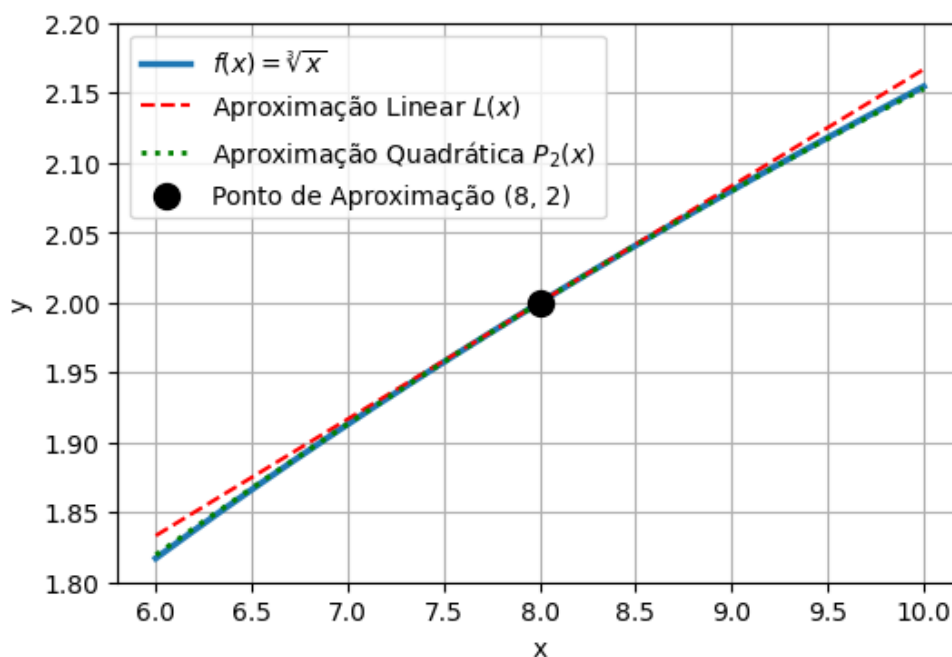
$$P_2(x) = 2 + \frac{1}{12}(x - 8) + \frac{-1/144}{2}(x - 8)^2 = 2 + \frac{1}{12}(x - 8) - \frac{1}{288}(x - 8)^2$$

Para $x = 8.1$:

$$P_2(8.1) = 2 + \frac{1}{120} - \frac{(0.1)^2}{288} = 2 + \frac{1}{120} - \frac{1}{28800} \approx 2.00829861$$

O erro é: $|f(8.1) - P_2(8.1)| \approx |2.00829885 - 2.00829861| \approx 2.4 \times 10^{-7}$.

(c) Verificação Gráfica:



26. Considere a função $g(x) = \cos x$ em torno do ponto $a = 30^\circ$
- Utilize aproximação linear para estimar $g(29^\circ)$ e calcule o erro.
 - Utilize aproximação quadrática para estimar $g(29^\circ)$ e calcule o erro.
 - Verifique graficamente a função e as aproximações na região.

OBS: a derivada deve ser calculada em radianos

Solution: A primeira etapa é converter os ângulos de graus para radianos, pois as fórmulas de derivação de funções trigonométricas são válidas para radianos.

- Ponto de aproximação: $a = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ rad.
- Ponto a ser estimado: $x = 29^\circ$. A diferença é $(x - a) = -1^\circ = -\frac{\pi}{180}$ rad.

Calculamos as derivadas de $g(x) = \cos x$ e seus valores em $a = \pi/6$:

- $g(x) = \cos x \implies g(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $g'(x) = -\sin x \implies g'(\pi/6) = -\frac{1}{2}$
- $g''(x) = -\cos x \implies g''(\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

O valor real de $g(29^\circ) = \cos(29^\circ) \approx 0.8746197$.

(a) **Aproximação Linear** $L(x) = g(a) + g'(a)(x - a)$.

$$L(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$$

Para $x = 29^\circ$, temos $x - a = -\frac{\pi}{180}$:

$$L(29^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{180} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{360} \approx 0.874752$$

O erro é: $|g(29^\circ) - L(29^\circ)| \approx |0.8746197 - 0.874752| \approx 1.32 \times 10^{-4}$.

(b) **Aproximação Quadrática** $P_2(x) = g(a) + g'(a)(x - a) + \frac{g''(a)}{2}(x - a)^2$.

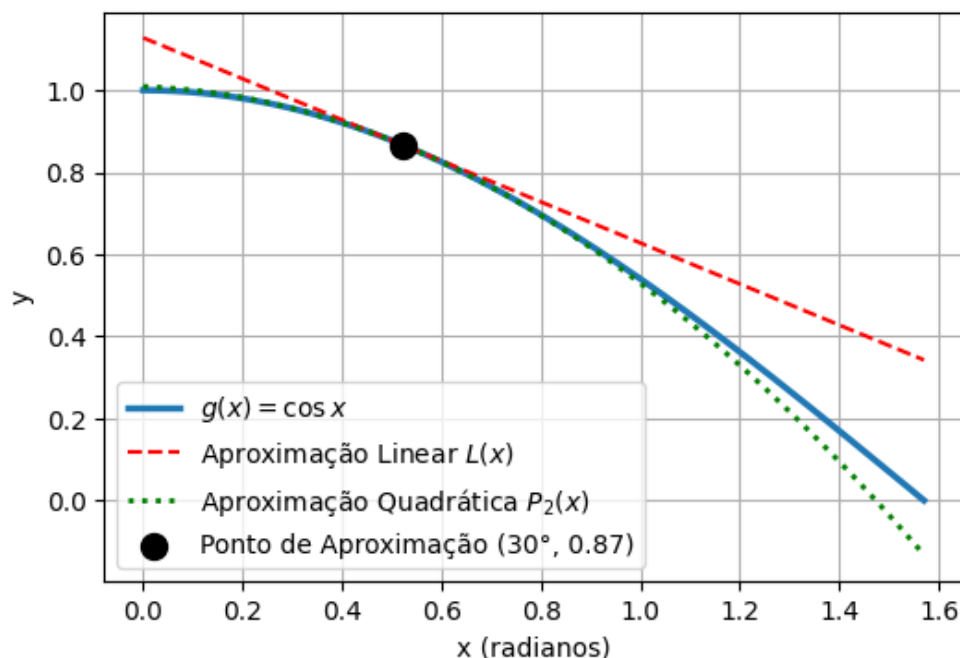
$$P_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(x - \frac{\pi}{6} \right)^2$$

Para $x = 29^\circ$:

$$P_2(29^\circ) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{360} \right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(-\frac{\pi}{180} \right)^2 \approx 0.874752 - 0.000132 \approx 0.874620$$

O erro é: $|g(29^\circ) - P_2(29^\circ)| \approx |0.8746197 - 0.874620| \approx 3 \times 10^{-8}$.

(c) **Verificação Gráfica:**



27. Seja a função $p(x) = e^{-2x}$

- Encontre o polinômio de MacLaurin de grau 3 para $p(x)$.
- Utilize o polinômio $P_3(x)$ para estimar o valor de $e^{-0.2}$.

Solution:

- O Polinômio de Maclaurin de grau 3 é o Polinômio de Taylor centrado em $a = 0$, dado pela fórmula:

$$P_3(x) = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3$$

Primeiro, calculamos as três primeiras derivadas de $p(x) = e^{-2x}$ e seus valores em $a = 0$.

- $p(x) = e^{-2x} \implies p(0) = e^0 = 1$
- $p'(x) = -2e^{-2x} \implies p'(0) = -2e^0 = -2$
- $p''(x) = 4e^{-2x} \implies p''(0) = 4e^0 = 4$
- $p'''(x) = -8e^{-2x} \implies p'''(0) = -8e^0 = -8$

Agora, substituímos esses valores na fórmula:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 1 + \frac{-2}{1!}x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{-8}{3!}x^3 \\ P_3(x) &= 1 - 2x + \frac{4}{2}x^2 - \frac{8}{6}x^3 \\ P_3(x) &= 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 \end{aligned}$$

- Para estimar o valor de $e^{-0.2}$ usando $p(x) = e^{-2x}$, devemos encontrar o valor de x tal que $-2x = -0.2$, o que nos dá $x = 0.1$. Agora, calculamos $P_3(0.1)$:

$$\begin{aligned} P_3(0.1) &= 1 - 2(0.1) + 2(0.1)^2 - \frac{4}{3}(0.1)^3 \\ &= 1 - 0.2 + 2(0.01) - \frac{4}{3}(0.001) \\ &= 0.82 - \frac{0.004}{3} \\ &\approx 0.82 - 0.001333\dots \\ &\approx 0.818667 \end{aligned}$$

A estimativa para $e^{-0.2}$ é aproximadamente **0.81867**.

28. Seja a função $q(x) = \frac{1}{x}$

- Encontre o polinômio de Taylor de grau 3 para $q(x)$ centrado em $a = 1$.
- Utilize o polinômio $P_3(x)$ para estimar o valor de $\frac{1}{1.1}$.

Solution:

(a) O Polinômio de Taylor de grau 3 centrado em $a = 1$ é dado por:

$$P_3(x) = q(1) + q'(1)(x-1) + \frac{q''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{q'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

Primeiro, calculamos as derivadas de $q(x) = x^{-1}$ e seus valores em $a = 1$.

- $q(x) = x^{-1} \implies q(1) = 1$
- $q'(x) = -x^{-2} \implies q'(1) = -1$
- $q''(x) = 2x^{-3} \implies q''(1) = 2$
- $q'''(x) = -6x^{-4} \implies q'''(1) = -6$

Substituindo na fórmula:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 1 + \frac{-1}{1!}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{-6}{3!}(x-1)^3 \\ P_3(x) &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 \end{aligned}$$

(b) Para estimar o valor de $\frac{1}{1.1}$, usamos a função $q(x)$ com $x = 1.1$. Avaliamos o polinômio $P_3(x)$ neste ponto. Note que o termo $(x-1)$ se torna $(1.1-1) = 0.1$.

$$\begin{aligned} P_3(1.1) &= 1 - (0.1) + (0.1)^2 - (0.1)^3 \\ &= 1 - 0.1 + 0.01 - 0.001 \\ &= 0.909 \end{aligned}$$

A estimativa para $\frac{1}{1.1}$ é **0.909**.

29. Considere a função $z(x) = \ln(x+1)$ e sua aproximação pelo Polinômio de Taylor em torno do ponto $a = 0$.

- (a) Estime o erro máximo cometido na aproximação de $\ln(1.2)$ ao utilizar $P_3(x)$, o polinômio de Taylor de grau 3, através da fórmula do Resto de Lagrange.
- (b) Determine o menor grau n do polinômio $P_n(x)$, necessário para garantir que o erro absoluto na aproximação de $\ln(1.2)$ seja inferior a 10^{-4} .

Solution:

(a) A fórmula do Resto de Lagrange para o erro da aproximação de $P_n(x)$ é:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

onde M é o valor máximo de $|f^{(n+1)}(c)|$ para c no intervalo entre a e x .

No nosso caso, $f(x) = z(x) = \ln(x+1)$, $a = 0$, $n = 3$ e $x = 0.2$. O intervalo para c é $[0, 0.2]$. Precisamos da 4ª derivada:

- $z'(x) = (x+1)^{-1}$
- $z''(x) = -(x+1)^{-2}$
- $z'''(x) = 2(x+1)^{-3}$
- $z^{(4)}(x) = -6(x+1)^{-4} = \frac{-6}{(x+1)^4}$

Agora, encontramos M maximizando $|z^{(4)}(c)| = \frac{6}{(c+1)^4}$ no intervalo $[0, 0.2]$. Como a função é decrescente, o máximo ocorre em $c = 0$:

$$M = \frac{6}{(0+1)^4} = 6$$

Finalmente, calculamos o erro máximo:

$$|R_3(0.2)| \leq \frac{6}{(3+1)!} (0.2-0)^{3+1} = \frac{6}{24} (0.2)^4 = \frac{1}{4} (0.0016) = 0.0004$$

O erro máximo cometido é de **0.0004**.

- (b) Queremos encontrar o menor grau n tal que $|R_n(0.2)| < 10^{-4}$. A fórmula geral para a $(n+1)$ -ésima derivada de $z(x)$ é $z^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! (x+1)^{-(n+1)}$. O valor máximo M de $|z^{(n+1)}(c)|$ em $[0, 0.2]$ ocorre em $c = 0$, resultando em $M = n!$.

Substituindo na fórmula do erro:

$$|R_n(0.2)| \leq \frac{n!}{(n+1)!} (0.2)^{n+1} = \frac{(0.2)^{n+1}}{n+1}$$

Precisamos encontrar o menor n que satisfaça:

$$\frac{(0.2)^{n+1}}{n+1} < 10^{-4}$$

Testamos valores para n :

- $n = 1 : \frac{(0.2)^2}{2} = \frac{0.04}{2} = 0.020000 = 2 \times 10^{-2}$ (Não satisfaz)
- $n = 2 : \frac{(0.2)^3}{3} = \frac{0.008}{3} = 0.002667 = 2,7 \times 10^{-3}$ (Não satisfaz)
- $n = 3 : \frac{(0.2)^4}{4} = \frac{0.0016}{4} = 0.000400 = 4 \times 10^{-4}$ (Não satisfaz)
- $n = 4 : \frac{(0.2)^5}{5} = \frac{0.00032}{5} = 0.000064 = 6.4 \times 10^{-5}$ (Satisfaz)

Portanto, o menor grau necessário é **n=4**.

30. Utilize os Polinômios de Taylor para verificar a Relação de Euler

- (a) Encontre os Polinômios de Maclaurin de ordem 7 para as funções $\sin(x)$ e $\cos(x)$.
- (b) Encontre o Polinômio de Maclaurin de ordem 7 para a função e^{ix} .
- (c) Mostre que com aproximação de ordem 7, vale a relação $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$.

Solution:

- (a) Os Polinômios de Maclaurin (Taylor em $a = 0$) de ordem 7 para $\sin(x)$ e $\cos(x)$ são derivados de suas séries de potências conhecidas.

- Para $\cos(x)$, usamos os termos pares:

$$P_7(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

- Para $\sin(x)$, usamos os termos ímpares:

$$P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

- (b) Para $f(x) = e^{ix}$, calculamos as derivadas em $a = 0$. Lembramos que $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.

- $f(x) = e^{ix} \implies f(0) = 1$
- $f'(x) = ie^{ix} \implies f'(0) = i$
- $f''(x) = i^2 e^{ix} = -e^{ix} \implies f''(0) = -1$
- $f'''(x) = -ie^{ix} \implies f'''(0) = -i$
- $f^{(k)}(0)$ segue o padrão $1, i, -1, -i, \dots$

Montando o polinômio de ordem 7:

$$P_7(x) = \frac{1}{0!} + \frac{i}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{-i}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{i}{5!}x^5 + \frac{-1}{6!}x^6 + \frac{-i}{7!}x^7$$

- (c) Montamos a expressão $\cos(x) + i \sin(x)$ usando os polinômios da parte (a):

$$\begin{aligned} P_{\cos}(x) + i \cdot P_{\sin}(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ix - \frac{ix^3}{3!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{ix^7}{7!} \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} \end{aligned}$$

Este resultado é exatamente o polinômio de Maclaurin para e^{ix} que encontramos na parte (b). Isso verifica a Relação de Euler para a aproximação de 7ª ordem.

Bons Estudos!!!

Capítulo 3

Integrais

Sobre este capítulo

Após dominar a análise das taxas de variação, fechamos o conhecimento com o estudo das antiderivadas, também conhecidas como integrais. Se a derivada fragmenta o movimento para entender o instante, a integral percorre o caminho inverso, reconstruindo o todo a partir do acúmulo de suas partes infinitesimais. Neste capítulo, exploraremos como essa ferramenta permite calcular áreas sob curvas complexas e volumes de sólidos, fundamentando a compreensão de grandezas acumuladas em sistemas físicos e processos industriais.

Competências e habilidades

- **Percepção de Acúmulo:** Compreender a integral definida como o limite de uma soma, interpretando-a como a acumulação total de uma grandeza ao longo de um intervalo.
- **Domínio das Primitivas:** Desenvolver fluência nas técnicas de integração, para encontrar a função que descreve o estado original de um sistema a partir de sua taxa de variação.
- **Aplicação do Teorema Fundamental:** Consolidar a conexão entre diferenciação e integração através do Teorema Fundamental do Cálculo, utilizando-o como a ponte definitiva para a resolução de problemas práticos de engenharia.
- **Análise de Áreas e Sólidos:** Empregar integração para determinar áreas e volumes de revolução, traduzindo o formalismo analítico em métricas espaciais exatas para o estudo de sólidos e superfícies de contornos irregulares.

***Dica de Estudo:** Utilize o Laboratório Virtual para visualizar o limite das somas de Riemann e observe como o erro da aproximação tende a zero conforme o número de divisões aumenta. O poder do Python permitirá que você visualize sólidos de revolução e áreas complexas em 3D. A integral é a sua ferramenta para transformar aproximações em respostas exatas.*

Laboratório Virtual: Integrais

Explore o conteúdo desta unidade de forma interativa e dinâmica através de simulações e desafios em Python, utilizando a plataforma do Google Colab. Escaneie o QRcode ou acesse o link para iniciar sua prática.

https://colab.research.google.com/github/professorpalhares/Matematica/blob/main/Funcoes-de-uma-Variavel/Lista_3_integrais.ipynb



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas	
Campus	Manaus - Distrito Industrial
Curso	Engenharia de Computação
Disciplina	ECP12 - Cálculo Diferencial e Integral I
Docente	Eduardo Palhares Júnior

Lista 3: Integrais

Conceito de integral

- Considere a função $f(x) = x^2 + 2$ no intervalo $[0, 4]$. Utilize a soma de Riemann para estimar a área sob o gráfico de f através dos retângulos de aproximação:
 - Considere 4 retângulos (extremidades esquerdas, direitas e pontos médios).
 - Considere 8 retângulos (extremidades esquerdas, direitas e pontos médios).
 - Calcule o erro de cada aproximação comparando com a integral definida.

Solution: Primeiro, calculamos o valor exato da área usando a integral definida, para fins de comparação:

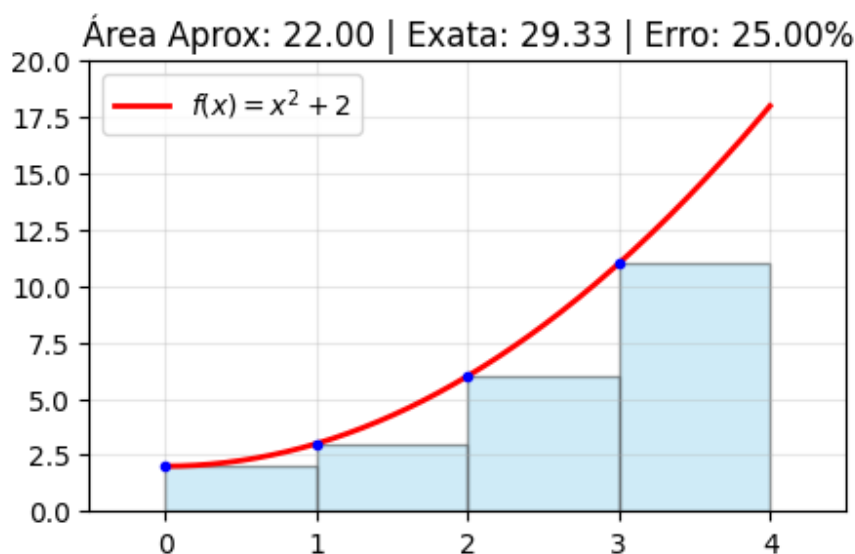
$$I = \int_0^4 (x^2 + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x \right]_0^4 = \left(\frac{64}{3} + 8 \right) - 0 = \frac{88}{3} \approx 29,3333$$

- (a) **Para $n = 4$:** Temos $\Delta x = \frac{4 - 0}{4} = 1$.

Os subintervalos são $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$.

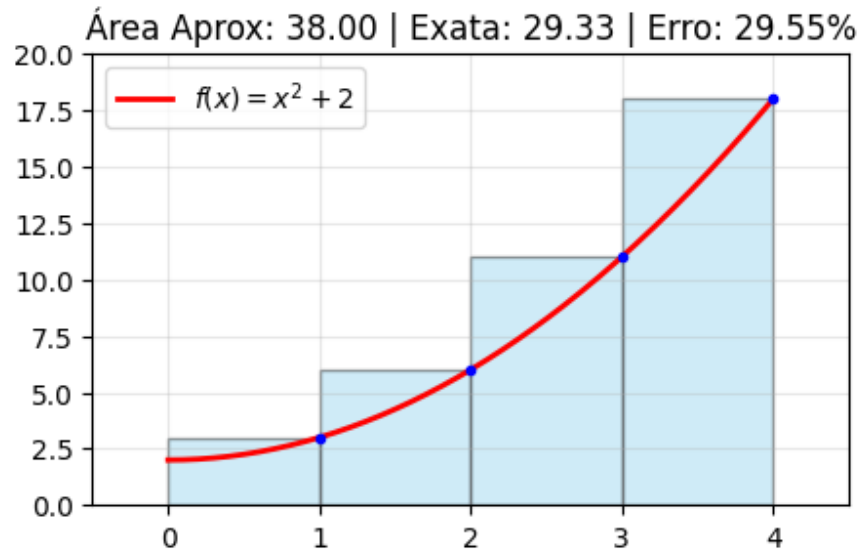
- Esquerda (L_4):** $x_i^* \in \{0, 1, 2, 3\}$.

$$L_4 = 1 \cdot [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)] = 1 \cdot [2 + 3 + 6 + 11] = 22$$



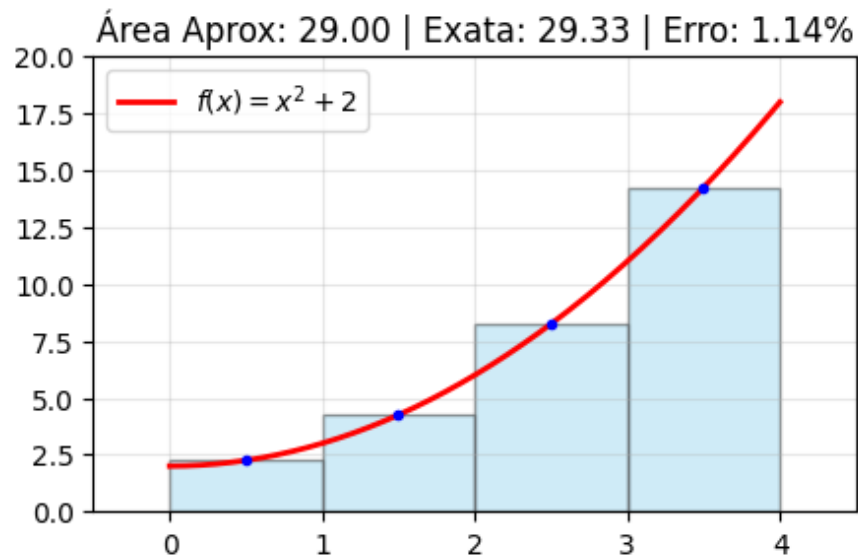
- **Direita (R_4):** $x_i^* \in \{1, 2, 3, 4\}$.

$$R_4 = 1 \cdot [f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] = 1 \cdot [3 + 6 + 11 + 18] = 38$$



- **Ponto Médio (M_4):** $x_i^* \in \{0.5, 1.5, 2.5, 3.5\}$.

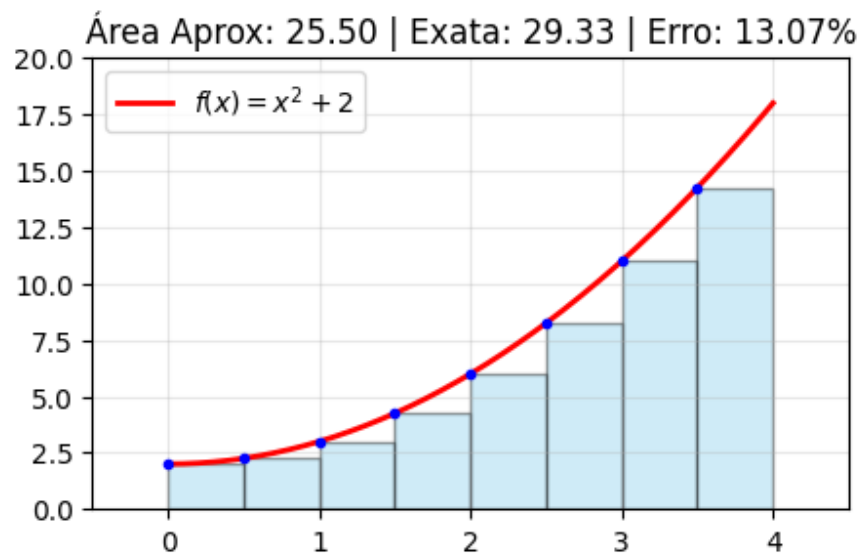
$$M_4 = 1 \cdot [f(0.5) + f(1.5) + f(2.5) + f(3.5)] = 1 \cdot [2, 25 + 4, 25 + 8, 25 + 14, 25] = 29$$



- (b) **Para $n = 8$:** Temos $\Delta x = \frac{4 - 0}{8} = 0,5$. Os pontos da partição são $\{0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4\}$.

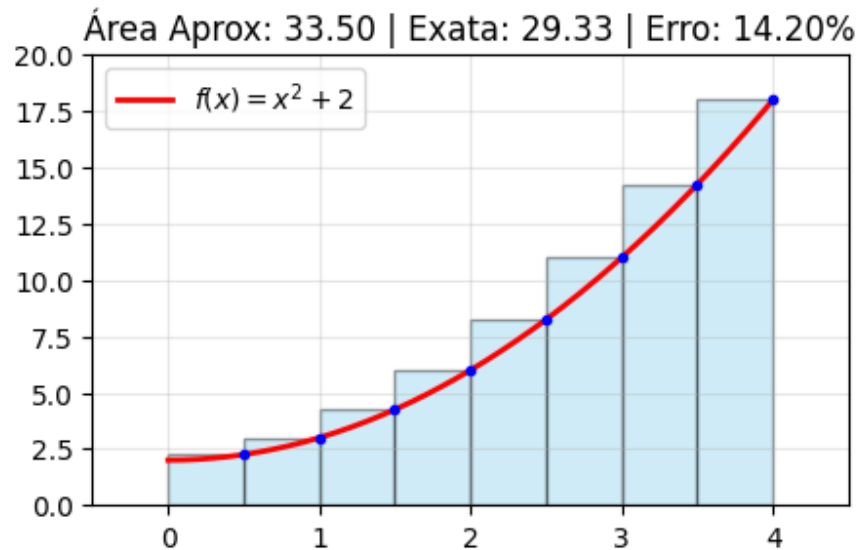
- **Esquerda (L_8):** Somamos os valores da função nos 8 primeiros pontos.

$$\begin{aligned} L_8 &= 0,5 \cdot [f(0) + f(0,5) + f(1) + f(1,5) + f(2) + f(2,5) + f(3) + f(3,5)] \\ &= 0,5 \cdot [2 + 2,25 + 3 + 4,25 + 6 + 8,25 + 11 + 14,25] \\ &= 0,5 \cdot [51] \\ &= 25,5 \end{aligned}$$



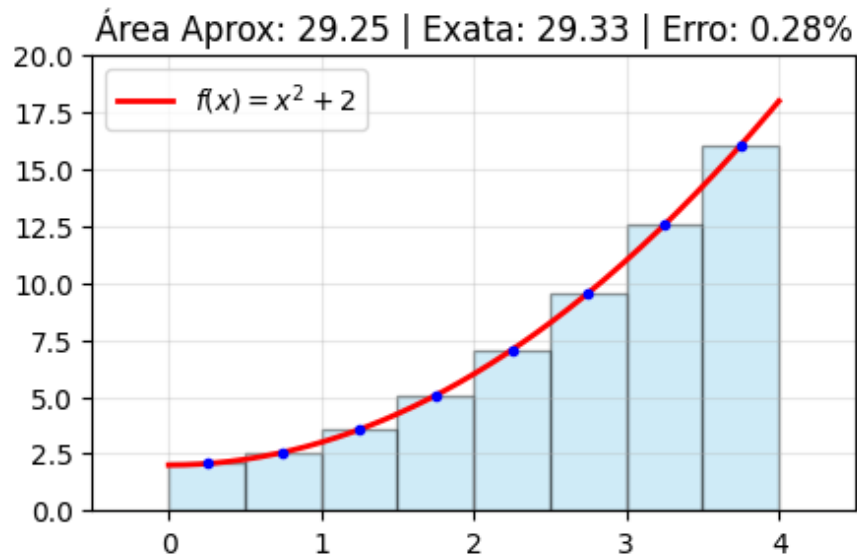
- **Direita (R_8):** Somamos os valores da função a partir do segundo ponto até o final.

$$\begin{aligned}
 R_8 &= 0,5 \cdot [f(0,5) + f(1) + f(1,5) + f(2) + f(2,5) + f(3) + f(3,5) + f(4)] \\
 &= 0,5 \cdot [2,25 + 3 + 4,25 + 6 + 8,25 + 11 + 14,25 + 18] \\
 &= 0,5 \cdot [67] \\
 &= 33,5
 \end{aligned}$$



- **Ponto Médio (M_8):** Os pontos médios são $\{0,25; 0,75; 1,25; 1,75; 2,25; 2,75; 3,25; 3,75\}$.

$$\begin{aligned}
 M_8 &= 0,5 \cdot [f(0,25) + f(0,75) + f(1,25) + f(1,75) + f(2,25) \\
 &\quad + f(2,75) + f(3,25) + f(3,75)] \\
 &= 0,5 \cdot [2,0625 + 2,5625 + 3,5625 + 5,0625 + 7,0625 \\
 &\quad + 9,5625 + 12,5625 + 16,0625] \\
 &= 0,5 \cdot [58,5] \\
 &= 29,25
 \end{aligned}$$



(c) **Erros** ($E = |Valor_{exato} - Valor_{aprox}|$):

- $n = 4$:

$$E_L \approx |29,33 - 22| = 7,33 \text{ ou seja } E_L\% = \frac{7,33}{29,33} \cdot 100 \approx 25,00\%$$

$$E_R \approx |29,33 - 38| = 8,67 \text{ ou seja } E_R\% = \frac{8,67}{29,33} \cdot 100 \approx 29,55\%$$

$$E_M \approx |29,33 - 29| = 0,33 \text{ ou seja } E_M\% = \frac{0,33}{29,33} \cdot 100 \approx 1,14\%$$

- $n = 8$:

$$E_L \approx |29,33 - 25,5| = 3,83 \text{ ou seja } E_L\% = \frac{3,83}{29,33} \approx 13,07\%$$

$$E_R \approx |29,33 - 33,5| = 4,17 \text{ ou seja } E_R\% = \frac{4,17}{29,33} \approx 14,20\%$$

$$E_M \approx |29,33 - 29,25| = 0,08 \text{ ou seja } E_M\% = \frac{0,08}{29,33} \approx 0,28\%.$$

Note que a aproximação pelo ponto médio é muito mais precisa, e dobrar o número de retângulos reduz o erro pela metade (nas extremidades) ou por quatro (no ponto médio).

2. Utilize a definição para calcular a integral das seguintes funções:

(a) $\int_0^x t \, dt = \frac{x^2}{2}$

(b) $\int_0^x t^2 \, dt = \frac{x^3}{3}$

(c) $\int_0^x e^t \, dt = e^x - 1$

$$\int_0^x f(t) \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t$$

Solution: A definição de integral definida no intervalo $[0, x]$ é dada pelo limite da soma de Riemann:

$$\int_0^x f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t$$

Para todos os itens, dividimos o intervalo $[0, x]$ em n subintervalos de largura $\Delta t = \frac{x-0}{n} = \frac{x}{n}$. Escolhemos a extremidade direita para $t_i = 0 + i\Delta t = \frac{ix}{n}$.

(a) $f(t) = t$.

$$\text{Soma dos inteiros (Soma de Gauss)} \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^x t dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{ix}{n} \right) \cdot \frac{x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2} \left(\frac{n^2+n}{n^2} \right) = \frac{x^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{x^2}{2} (1+0) = \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

(b) $f(t) = t^2$.

$$\text{Soma dos inteiros quadrados} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{ix}{n} \right)^2 \cdot \frac{x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^3}{6} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} \right] \\ &= \frac{x^3}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} \right] = \frac{x^3}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{x^3}{6} (2) = \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

(c) $f(t) = e^t$.

$$\text{Soma geométrica} \sum_{i=1}^n r^i = r \frac{r^n - 1}{r - 1}, \text{ onde } r = e^{x/n} \Rightarrow r^n = (e^{x/n})^n = e^x$$

$$\int_0^x e^t dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^{ix/n} \cdot \frac{x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \sum_{i=1}^n (e^{x/n})^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \cdot e^{x/n} \frac{e^x - 1}{e^{x/n} - 1}$$

$$\text{Limite fundamental} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^x e^t dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \cdot e^{x/n} \frac{e^x - 1}{e^{x/n} - 1} = (e^x - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x/n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x/n}{e^{x/n} - 1} \\ &= (e^x - 1) \cdot 1 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{e^h - 1} = (e^x - 1) \cdot 1 \cdot 1 = e^x - 1 \end{aligned}$$

3. Seja as integrais $\int_0^5 f(x)dx = 10$, $\int_0^5 g(x)dx = -3$ e $\int_0^2 f(x)dx = 4$, utilize as propriedades da integral definida para calcular:

(a) $\int_0^5 [2f(x) - 3g(x)] dx$

(c) $\int_5^0 g(x) dx$

(b) $\int_2^5 f(x) dx$

(d) $\int_{-2}^3 f(x+2) dx$

Solution:

(a) **Linearidade:** $\int_a^b (u \cdot f(x) + v \cdot g(x)) dx = u \int_a^b f(x)dx + v \int_a^b g(x)dx$

$$\int_0^5 [2f(x) - 3g(x)]dx = 2 \int_0^5 f(x)dx - 3 \int_0^5 g(x)dx = 2(10) - 3(-3) = 20 + 9 = 29$$

(b) **Aditividade em Intervalos:** $\int_0^b f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$.

$$\int_2^5 f(x)dx = \int_0^5 f(x)dx - \int_0^2 f(x)dx = 10 - 4 = 6$$

(c) **Inversão dos Limites de Integração:** $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

$$\int_5^0 g(x)dx = - \int_0^5 g(x)dx = -(-3) = 3$$

(d) **Substituição (Translação):** Considerando a substituição $u = x + 2$.

- Substituição: $u = x + 2$

Novos limites:

- $x = -2 \Rightarrow u = -2 + 2 = 0$

- Diferencial: $\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$

- $x = 3 \Rightarrow u = 3 + 2 = 5$

Substituindo na integral:

$$\int_{-2}^3 f(x+2)dx = \int_0^5 f(u)du \text{ (onde } u \text{ é variável muda)} = \int_0^5 f(x)dx = 10$$

4. Utilize o Teorema Fundamental do Cálculo para avaliar as integrais definidas à seguir:

(a) $\int_{-1}^2 (x^3 - 2x) dx$

(c) $\int_0^{\pi/4} \sec^2(t) dt$

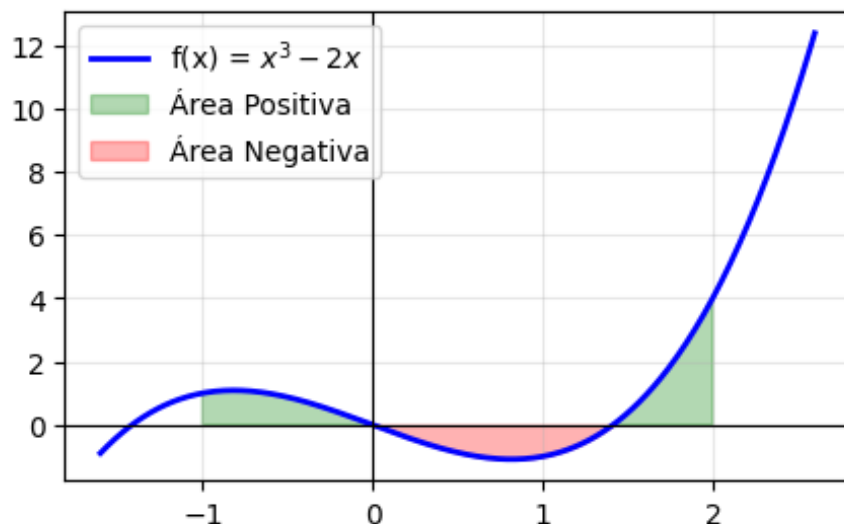
(b) $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

(d) $\int_{-1}^1 (x^{99} + \tan x) dx$

Solution: O Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 2) afirma que se F é uma primitiva de f em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

(a) A primitiva de $f(x) = x^3 - 2x$ é $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2$.

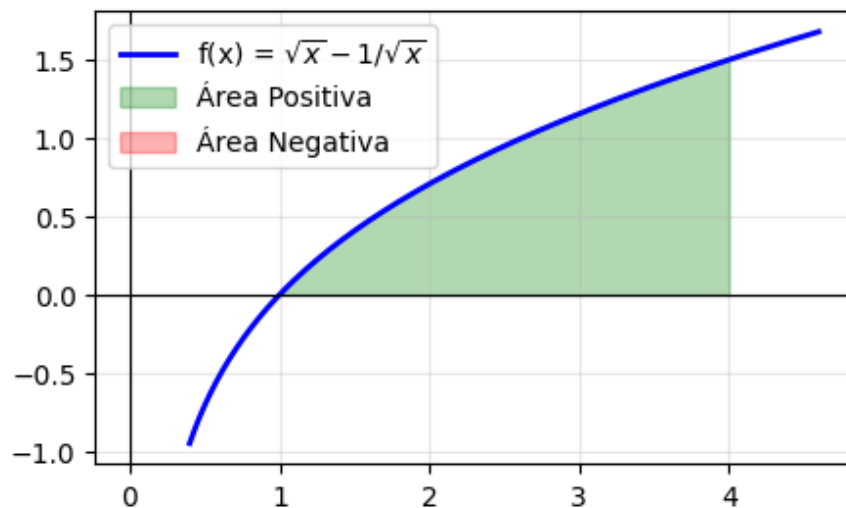
$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 (x^3 - 2x) dx &= \left[\frac{x^4}{4} - x^2 \right]_{-1}^2 \\ &= \left(\frac{2^4}{4} - 2^2 \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^2 \right) \\ &= \left(\frac{16}{4} - 4 \right) - \left(\frac{1}{4} - 1 \right) \\ &= (4 - 4) - \left(-\frac{3}{4} \right) = 0 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$



(b) Reescrevendo a função como potências: $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{1/2} - x^{-1/2}$.

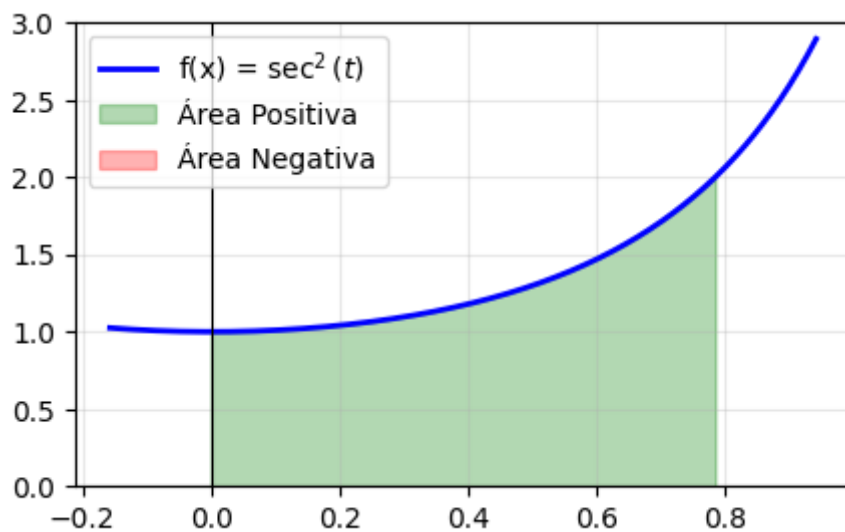
A primitiva é $F(x) = \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{1/2}}{1/2} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 (x^{1/2} - x^{-1/2}) dx &= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \right]_1^4 \\ &= \left(\frac{2}{3}(4)\sqrt{4} - 2\sqrt{4} \right) - \left(\frac{2}{3}(1)\sqrt{1} - 2\sqrt{1} \right) \\ &= \left(\frac{16}{3} - 4 \right) - \left(\frac{2}{3} - 2 \right) \\ &= \left(\frac{16 - 12}{3} \right) - \left(\frac{2 - 6}{3} \right) = \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3} \right) = \frac{8}{3}\end{aligned}$$



(c) Sabemos que a derivada de $\tan(t)$ é $\sec^2(t)$, logo a primitiva é $F(t) = \tan(t)$.

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2(t) dt = \left[\tan(t) \right]_0^{\pi/4} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) = 1 - 0 = 1$$

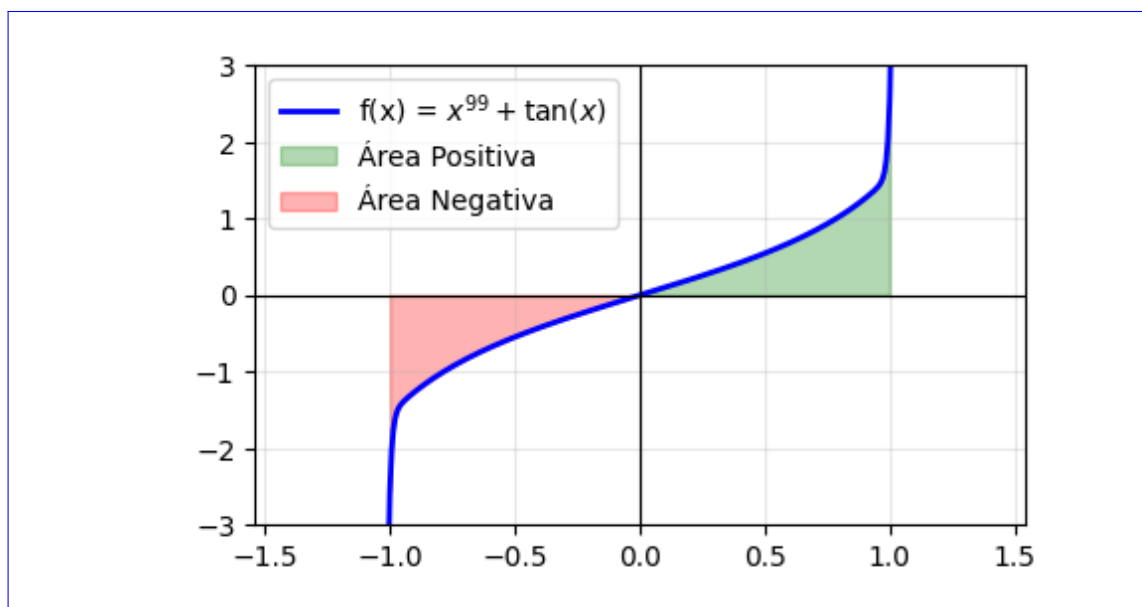


(d) Observamos que $f(x) = x^{99} + \tan(x)$ é uma função **ímpar**, pois:

$$f(-x) = (-x)^{99} + \tan(-x) = -x^{99} - \tan(x) = -f(x)$$

A integral de uma função ímpar em um intervalo simétrico $[-a, a]$ é sempre zero, pois a área negativa cancela a área positiva.

$$\int_{-1}^1 (x^{99} + \tan x) dx = 0$$



5. Encontre o valor médio da função $f(x) = x^2 - 1$ no intervalo $[0, 2]$ e determine o ponto c no intervalo onde a função atinge esse valor.

Solution: O valor médio de uma função contínua f em um intervalo $[a, b]$ é dado por:

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Passo 1: Calcular a Integral Definida

$$\int_0^2 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2 \right) - \left(\frac{0^3}{3} - 0 \right) = \left(\frac{8}{3} - \frac{6}{3} \right) - 0 = \frac{2}{3}$$

Passo 2: Calcular o Valor Médio

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{2-0} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Passo 3: Determinar o valor de c Pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, existe $c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = f_{\text{med}}$.

$$c^2 - 1 = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \implies c = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Como c deve pertencer ao intervalo $[0, 2]$, descartamos a solução negativa.

$$c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,155$$

Técnicas de integração

6. Utilize o método da substituição para calcular as integrais à seguir:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int (3x^4 - 5x^{\frac{2}{3}} + x^{-2}) dx & \text{(d)} \int \frac{(\ln x)^4}{x} dx & \text{(g)} \int \frac{\sin(2x)}{1 + \cos^2(x)} dx \\
 \text{(b)} \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx & \text{(e)} \int \frac{1}{x \ln x} dx & \text{(h)} \int x\sqrt{x-1} dx \\
 \text{(c)} \int x^2 e^{x^3} dx & \text{(f)} \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx & \text{(i)} \int \frac{1}{\sqrt{1 - 16x^2}} dx
 \end{array}$$

Solution:

(a) Embora o enunciado peça substituição, esta integral pode ser resolvida diretamente pela Regra da Potência $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, pois é uma soma de funções potência.

$$\begin{aligned}
 \int (3x^4 - 5x^{2/3} + x^{-2}) dx &= 3 \frac{x^{4+1}}{4+1} - 5 \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C \\
 &= \frac{3}{5} x^5 - 5 \left(\frac{x^{5/3}}{5/3} \right) + \frac{x^{-1}}{-1} + C \\
 &= \frac{3}{5} x^5 - 5 \cdot \frac{3}{5} x^{5/3} - \frac{1}{x} + C \\
 &= \frac{3}{5} x^5 - 3\sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{x} + C
 \end{aligned}$$

(b) Nesta integral, temos uma função composta no denominador.

- Substituição: $u = x^2 + 1$.
- Diferencial: $du = 2x dx \implies x dx = \frac{du}{2}$.

Substituindo na integral:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \left(\frac{du}{2} \right) = \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^{1/2}}{1/2} \right) + C \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{u} + C = \sqrt{x^2 + 1} + C
 \end{aligned}$$

(c) Identificamos que x^2 é (a menos de constante) a derivada do expoente x^3 .

- Substituição: $u = x^3$.
- Diferencial: $du = 3x^2 dx \implies x^2 dx = \frac{du}{3}$.

Substituindo na integral:

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \int e^u \cdot \left(\frac{du}{3} \right) = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

(d) Nesta integral, observamos que a derivada de $\ln(x)$ é $1/x$, que aparece multiplicando o termo $(\ln x)^4$.

- Substituição: $u = \ln(x)$.
- Diferencial: $du = \frac{1}{x} dx$.

Substituindo na integral:

$$\int \frac{(\ln x)^4}{x} dx = \int (\ln x)^4 \cdot \frac{1}{x} dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{(\ln x)^5}{5} + C$$

(e) Aqui temos novamente o logaritmo e sua derivada, mas em uma estrutura aninhada no denominador.

- Substituição: $u = \ln(x)$.
- Diferencial: $du = \frac{1}{x} dx$.

Substituindo na integral:

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$$

(f) Reescrevemos o denominador notando que $e^{2x} = (e^x)^2$. Isso sugere uma estrutura similar à derivada do arco-tangente: $\frac{1}{1+u^2}$.

- Substituição: $u = e^x$.
- Diferencial: $du = e^x dx$.

Substituindo na integral:

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{1}{1+(e^x)^2} \cdot e^x dx = \int \frac{1}{1+u^2} du = \arctan(u) + C = \arctan(e^x) + C$$

(g) Utilizar a identidade trigonométrica do arco duplo: $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$. Assim, a derivada de $\cos^2(x)$ aparece no numerador.

- Substituição: $u = 1 + \cos^2(x)$.
- Diferencial: $du = 2 \cos(x)(-\sin(x)) dx \implies \sin(2x) dx = -du$.

Substituindo na integral:

$$\int \frac{\sin(2x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \int \frac{-1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln(1 + \cos^2(x)) + C$$

(h) Aqui temos um fator x "sobrando" fora da raiz. Isolamos x na substituição.

- Substituição: $u = x - 1 \implies x = u + 1$.
- Diferencial: $du = dx$.

Substituindo tudo em função de u :

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-1} dx &= \int (u+1)\sqrt{u} du = \int (u \cdot u^{1/2} + u^{1/2}) du = \int (u^{3/2} + u^{1/2}) du \\ &= \frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

- (i) A estrutura sugere a derivada do arco-seno: $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$. Precisamos ajustar o termo $16x^2$ para ser um quadrado perfeito $(4x)^2$.

- Substituição: $u = 4x$.
- Diferencial: $du = 4 dx \implies dx = \frac{du}{4}$.

Substituindo na integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-16x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \arcsin(u) + C = \frac{1}{4} \arcsin(4x) + C$$

7. Utilize o método da integração por partes para calcular as integrais à seguir:

- | | | |
|---------------------------|--------------------------|---------------------------|
| (a) $\int x e^{-x} dx$ | (c) $\int \ln(x) dx$ | (e) $\int \arctan(x) dx$ |
| (b) $\int x^2 \sin(x) dx$ | (d) $\int t^3 \ln(t) dt$ | (f) $\int e^x \cos(x) dx$ |

Solution: A fórmula de integração por partes é $\int u dv = uv - \int v du$. A escolha de u geralmente segue a regra LIATE (Logarítmica, Inversa, Algébrica, Trigonométrica, Exponencial).

- (a) Escolhemos u como a função algébrica (x) e dv como a exponencial ($e^{-x} dx$).

- $u = x \implies du = dx$
- $dv = e^{-x} dx \implies v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$

Aplicando a fórmula:

$$\int x e^{-x} dx = x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$$

- (b) Um polinômio de grau 2 sugere aplicar a integração por partes duas vezes.

Primeira aplicação:

- $u = x^2 \implies du = 2x dx$
- $dv = \sin(x) dx \implies v = -\cos(x)$

$$\int x^2 \sin(x) dx = -x^2 \cos(x) - \int (-\cos(x)) \cdot 2x dx = -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) dx$$

Segunda aplicação:

- $u = x \implies du = dx$
- $dv = \cos(x) dx \implies v = \sin(x)$

$$\int x \cos(x) dx = x \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \sin(x) - (-\cos(x)) = x \sin(x) + \cos(x)$$

Substituindo de volta na equação original:

$$\int x \cos(x) dx = -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) + C$$

(c) Para integrar o logaritmo natural, escolhemos $u = \ln(x)$, restando $dv = dx$.

- $u = \ln(x) \implies du = \frac{1}{x} dx$
- $dv = dx \implies v = x$

Aplicando a fórmula:

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + C$$

(d) Seguindo a regra LIATE, Logarítmica $\ln t$ tem prioridade sobre Algébrica t^3 .

- $u = \ln(t) \implies du = \frac{1}{t} dt$
- $dv = t^3 dt \implies v = \frac{t^4}{4}$

Aplicando a fórmula:

$$\begin{aligned} \int t^3 \ln(t) dt &= \ln(t) \cdot \frac{t^4}{4} - \int \frac{t^4}{4} \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{t^4 \ln(t)}{4} - \frac{1}{4} \int t^3 dt \\ &= \frac{t^4 \ln(t)}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{t^4}{16} (4 \ln(t) - 1) + C \end{aligned}$$

(e) Para integrar inversas trigonométricas sozinhas, usamos $dv = dx$.

- $u = \arctan(x) \implies du = \frac{1}{1+x^2} dx$
- $dv = dx \implies v = x$

$$\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

Em seguida aplicamos substituição simples: $w = 1 + x^2 \implies dw = 2x dx$.

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dw}{w} = \frac{1}{2} \ln|w| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

Substituindo de volta na equação original:

$$\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$$

(f) Esta é uma integral cíclica. Aplicaremos integração por partes duas vezes.

Primeira aplicação:

- $u = \cos(x) \implies du = -\sin(x) dx$
- $dv = e^x dx \implies v = e^x$

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) - \int e^x (-\sin(x)) dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx$$

Segunda aplicação:

- $u = \sin(x) \implies du = \cos(x) dx$
- $dv = e^x dx \implies v = e^x$

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

Substituindo de volta na equação original:

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x dx &= e^x \cos x + \left[e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \right] \\ \int e^x \cos x dx + \int e^x \cos x dx &= e^x \cos x + e^x \sin x \\ \int e^x \cos x dx &= \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} \end{aligned}$$

8. Utilize as identidades trigonométricas para calcular as integrais à seguir:

$$(a) \int \sin^3(x) \cos^2(x) dx \quad (b) \int \cos^4(x) dx \quad (c) \int \sin(3x) \cos(5x) dx$$

Solution:

(a) Como a potência de seno é ímpar ($n = 3$), separamos um fator $\sin(x)$ para compor o diferencial du e convertemos o restante utilizando a identidade trigonométrica $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.

- Identidade: $\sin^3(x) = \sin^2(x) \cdot \sin(x) = (1 - \cos^2(x)) \sin(x)$.
- Substituição: $u = \cos(x) \implies du = -\sin(x) dx$.

$$\begin{aligned} \int \sin^3(x) \cos^2(x) dx &= \int (1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) \cdot \sin(x) dx = \int (1 - u^2) u^2 \cdot (-du) \\ &= \int (u^4 - u^2) du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} + C \end{aligned}$$

- (b) Como todas as potências são pares, utilizamos as identidades de arco metade (redução de ordem): $\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$.

$$\begin{aligned}\int \cos^4(x) dx &= \int (\cos^2(x))^2 dx = \int \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)) dx\end{aligned}$$

Aplicamos a identidade novamente para $\cos^2(2x) = \frac{1 + \cos(4x)}{2}$:

$$\begin{aligned}\int \cos^4(x) dx &= \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos(2x) + \frac{1}{2} + \frac{\cos(4x)}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} + 2\cos(2x) + \frac{1}{2}\cos(4x) \right) dx \\ &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C\end{aligned}$$

- (c) Utilizamos as fórmulas Werner de produto-para-soma para $A = 3x$ e $B = 5x$:

$$\begin{aligned}\sin(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}[\sin(A-B) + \sin(A+B)] \\ \sin(3x)\cos(5x) &= \frac{1}{2}[\sin(3x-5x) + \sin(3x+5x)] = \frac{1}{2}[\sin(-2x) + \sin(8x)]\end{aligned}$$

Como a função seno é ímpar, temos $\sin(-2x) = -\sin(2x)$.

$$\begin{aligned}\int \sin(3x)\cos(5x) dx &= \frac{1}{2} \int (-\sin(2x) + \sin(8x)) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-\left(-\frac{\cos(2x)}{2} \right) + \left(-\frac{\cos(8x)}{8} \right) \right] + C \\ &= \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{16}\cos(8x) + C\end{aligned}$$

9. Utilize o método da substituição trigonométrica para calcular as integrais à seguir:

$$(a) \int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx \quad (b) \int \sqrt{x^2-9} dx \quad (c) \int \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} dx$$

Solution:

- (a) A expressão $\sqrt{4-x^2}$ sugere a substituição seno ($a = 2$).

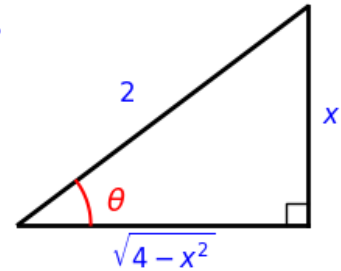
- $x = 2\sin(\theta)$, onde $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.
- $dx = 2\cos(\theta) d\theta$.
- $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2(\theta)} = 2\cos(\theta)$.

Substituindo na integral:

$$\int \frac{1}{(2 \sin \theta)^2 (2 \cos \theta)} \cdot 2 \cos \theta d\theta = \int \frac{1}{4 \sin^2 \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int \csc^2 \theta d\theta = -\frac{1}{4} \cot(\theta) + C$$

Retornando para x : Considerando o triângulo retângulo onde $\sin \theta = \frac{x}{2}$, temos $\cot \theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4-x^2}} dx = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C$$



(b) A expressão $\sqrt{x^2-9}$ sugere a substituição secante ($a=3$).

- $x = 3 \sec(\theta)$, onde $0 \leq \theta < \pi/2$ ou $\pi \leq \theta < 3\pi/2$.
- $dx = 3 \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta$.
- $\sqrt{x^2-9} = \sqrt{9 \sec^2 \theta - 9} = 3 \tan(\theta)$.

Substituindo na integral:

$$\begin{aligned} \int (3 \tan \theta) \cdot (3 \sec \theta \tan \theta) d\theta &= 9 \int \tan^2 \theta \sec \theta d\theta \\ &= 9 \int (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta d\theta \\ &= 9 \left[\int \sec^3 \theta d\theta - \int \sec \theta d\theta \right] \end{aligned}$$

As integrais resultantes necessitam de estratégias diferentes, portanto, a solução será dividida em 2 etapas separadas para facilitar a compreensão.

Cálculo de $\int \sec^3 \theta d\theta$: A função $\sec^3 \theta$ pode ser quebrada em um produto de funções cujas derivadas e integrais são conhecidas.

- $u = \sec \theta \implies du = \sec \theta \tan \theta d\theta$
- $dv = \sec^2 \theta d\theta \implies v = \tan \theta$

Aplicando a fórmula:

$$\begin{aligned} \int \sec^3 \theta d\theta &= \sec \theta \tan \theta - \int \tan \theta (\sec \theta \tan \theta) d\theta \\ \int \sec^3 \theta d\theta &= \sec \theta \tan \theta - \int \sec \theta (\sec^2 \theta - 1) d\theta \\ \int \sec^3 \theta d\theta &= \sec \theta \tan \theta - \int \sec^3 \theta d\theta + \int \sec \theta d\theta \\ 2 \int \sec^3 \theta d\theta &= \sec \theta \tan \theta + \int \sec \theta d\theta \\ \therefore \\ \int \sec^3 \theta d\theta &= \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| \end{aligned}$$

Cálculo de $\int \sec \theta d\theta$: Multiplicamos e dividimos por $(\sec \theta + \tan \theta)$

$$\int \sec \theta d\theta = \int \frac{\sec \theta (\sec \theta + \tan \theta)}{\sec \theta + \tan \theta} d\theta = \int \frac{\sec^2 \theta + \sec \theta \tan \theta}{\sec \theta + \tan \theta} d\theta$$

- $u = \sec \theta + \tan \theta$
- $du = (\sec \theta \tan \theta + \sec^2 \theta) d\theta$

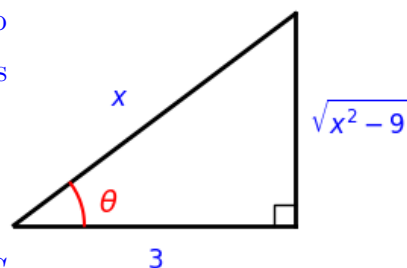
$$\int \sec \theta d\theta = \int \frac{\sec^2 \theta + \sec \theta \tan \theta}{\sec \theta + \tan \theta} d\theta = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|\sec \theta + \tan \theta|$$

Juntando tudo na expressão original:

$$\begin{aligned} 9 \left[\int \sec^3 \theta d\theta - \int \sec \theta d\theta \right] &= 9 \left[\left(\frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \ln|\sec \theta + \tan \theta| \right) - \ln|\sec \theta + \tan \theta| \right] \\ &= 9 \left[\frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta - \frac{1}{2} \ln|\sec \theta + \tan \theta| \right] \\ &= \frac{9}{2} \sec \theta \tan \theta - \frac{9}{2} \ln|\sec \theta + \tan \theta| + C \end{aligned}$$

Retornando para x : Considerando o triângulo retângulo onde $\cos \theta = \frac{3}{x}$, temos as relações

trigonometricas $\sec \theta = \frac{x}{3}$ e $\tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3}$



$$\int \sqrt{x^2 - 9} dx = \frac{x\sqrt{x^2 - 9}}{2} - \frac{9}{2} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 9}}{3} \right| + C$$

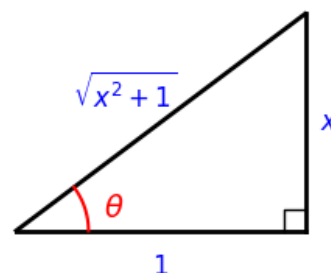
(c) A expressão $(x^2 + 1)^{3/2} = (\sqrt{x^2 + 1})^3$ sugere a substituição tangente ($a = 1$).

- $x = 1 \tan(\theta) \implies \tan(\theta) = x/1$.
- $dx = \sec^2(\theta) d\theta$.
- $\sqrt{x^2 + 1} = \sec(\theta)$.

Substituindo na integral:

$$\int \frac{1}{(\sec \theta)^3} \cdot \sec^2 \theta d\theta = \int \frac{1}{\sec \theta} d\theta = \int \cos \theta d\theta = \sin(\theta) + C$$

Retornando para x : Considerando o triângulo retângulo onde $\tan \theta = \frac{x}{1}$, temos $\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$



$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}} dx = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + C$$

10. Utilize o método das frações parciais para calcular as integrais à seguir:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx & \text{(c)} \int \frac{2x + 3}{(x - 1)^2} dx & \text{(e)} \int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx \\ \text{(b)} \int \frac{x^2 + 1}{x(x - 1)(x + 1)} dx & \text{(d)} \int \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx & \text{(f)} \int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx \end{array}$$

Solution:

(a) Primeiro, fatoramos o denominador: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Como os fatores são lineares e distintos, propomos a decomposição:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}$$

Multiplicando ambos os lados pelo denominador comum:

$$1 = A(x - 3) + B(x - 2)$$

Para encontrar as constantes, substituímos as raízes:

- Se $x = 2$: $1 = A(2 - 3) + B(0) \implies 1 = -A \implies A = -1$.
- Se $x = 3$: $1 = A(0) + B(3 - 2) \implies 1 = B(1) \implies B = 1$.

Agora integramos a expressão decomposta:

$$\int \left(\frac{-1}{x - 2} + \frac{1}{x - 3} \right) dx = -\ln|x - 2| + \ln|x - 3| + C = \ln \left| \frac{x - 3}{x - 2} \right| + C$$

(b) O denominador já está fatorado em fatores lineares distintos: x , $(x - 1)$ e $(x + 1)$. O grau do numerador (2) é menor que o do denominador (3), então podemos aplicar frações parciais diretamente.

$$\frac{x^2 + 1}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1}$$

Eliminando os denominadores:

$$x^2 + 1 = A(x - 1)(x + 1) + B(x)(x + 1) + C(x)(x - 1)$$

Substituindo as raízes para encontrar as constantes:

- Se $x = 0$: $0^2 + 1 = A(-1)(1) \implies 1 = -A \implies A = -1$.
- Se $x = 1$: $1^2 + 1 = B(1)(2) \implies 2 = 2B \implies B = 1$.
- Se $x = -1$: $(-1)^2 + 1 = C(-1)(-2) \implies 2 = 2C \implies C = 1$.

A integral se torna:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} \right) dx &= -\ln|x| + \ln|x - 1| + \ln|x + 1| + C \\ &= \ln \left| \frac{(x - 1)(x + 1)}{x} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{x^2 - 1}{x} \right| + C \end{aligned}$$

- (c) O denominador possui um fator linear repetido $(x - 1)^2$. A decomposição deve incluir uma fração para cada potência do fator:

$$\frac{2x + 3}{(x - 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2}$$

Multiplicando pelo denominador comum $(x - 1)^2$:

$$2x + 3 = A(x - 1) + B$$

Para encontrar as constantes:

- Se $x = 1$: $2(1) + 3 = A(0) + B \implies B = 5$.
- Comparando os coeficientes de x : $2x = Ax \implies A = 2$.

A integral se torna:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{2}{x - 1} + \frac{5}{(x - 1)^2} \right) dx &= 2 \ln|x - 1| + \int 5(x - 1)^{-2} dx \\ &= 2 \ln|x - 1| + 5 \frac{(x - 1)^{-1}}{-1} + C \\ &= 2 \ln|x - 1| - \frac{5}{x - 1} + C \end{aligned}$$

- (d) O denominador possui um fator linear x e um fator quadrático irredutível $(x^2 + 1)$. Para o fator quadrático, o numerador deve ser linear $(Bx + C)$.

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Eliminando os denominadores:

$$1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x$$

$$1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$1 = (A + B)x^2 + Cx + A$$

Igualando os coeficientes dos polinômios dos dois lados:

- Termo constante: $A = 1$.
- Termo em x : $C = 0$.
- Termo em x^2 : $A + B = 0 \implies 1 + B = 0 \implies B = -1$.

A integral se torna:

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2 + 1} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

Importante destacar que para resolver a segunda integral foi aplicado o método de substituição $u = x^2 + 1 \implies du = 2x dx$.

- (e) O grau do numerador (3) é maior que o do denominador (2). Devemos realizar a divisão polinomial antes de aplicar frações parciais.

Dividindo x^3 por $x^2 + 1$:

$$x^3 = x(x^2 + 1) - x \implies \frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

Agora integramos cada termo separadamente:

$$\int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \int x dx - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

Para a segunda integral, podemos aplicar o método da substituição.

- $u = x^2 + 1$
- $du = 2x dx \implies x dx = du/2$

$$\int \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

- (f) Primeiro, fatoramos o denominador: $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2$. Temos um fator linear distinto (x) e um fator linear repetido $((x+1)^2)$.

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx = \frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Multiplicando pelo denominador comum:

$$5x^2 + 20x + 6 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

Encontrando as constantes:

- Se $x = 0$: $6 = A(1)^2 \implies A = 6$.
- Se $x = -1$: $5(-1)^2 + 20(-1) + 6 = C(-1) \implies 5 - 20 + 6 = -C \implies -9 = -C \implies C = 9$.
- Comparando coeficientes de x^2 : $5x^2 = (A+B)x^2 \implies 5 = 6 + B \implies B = -1$.

A integral se torna:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{9}{(x+1)^2} \right) dx &= 6 \ln|x| - \ln|x+1| + \int 9(x+1)^{-2} dx \\ &= 6 \ln|x| - \ln|x+1| + 9 \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C \\ &= 6 \ln|x| - \ln|x+1| - \frac{9}{x+1} + C \end{aligned}$$

Integrais impróprias

11. Analise as integrais impróprias quanto a convergência e calcule seu limite (se existir).

- | | | |
|--|--|------------------------------------|
| (a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$ | (d) $\int_0^{\infty} x e^{-2x} dx$ | (g) $\int_0^{\pi/2} \tan(x) dx$ |
| (b) $\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$ | (e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ | (h) $\int_0^1 x \ln(x) dx$ |
| (c) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ | (f) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$ | (i) $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2} dx$ |

Solution: Para integrais em intervalos infinitos, substituímos o infinito por uma variável auxiliar e calculamos o limite quando ela tende ao infinito.

(a)

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-3} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2t^2} - \left(-\frac{1}{2(1)^2} \right) \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusão: A integral **converge**.

(b)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 e^{2x} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_t^0 \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^0}{2} - \frac{e^{2t}}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{2t} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusão: A integral **converge**.

(c) Fazendo a substituição: $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$, onde $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow u = 0 \\ x = t \Rightarrow u = \ln t \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\ln t} u du = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^{\ln t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{(\ln t)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = \infty \end{aligned}$$

Conclusão: A integral **diverge**.

(d) Aplicamos o limite e Integração por Partes $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{e^{-2x}}{2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x e^{-2x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{x e^{-2x}}{2} \right]_0^t - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t -\frac{e^{-2x}}{2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left[-\frac{t e^{-2t}}{2} - 0 \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^t \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{t}{2e^{2t}} - \frac{1}{4e^{2t}} + \frac{1}{4} e^0 \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Conclusão: A integral **converge**.

- (e) Como ambos os limites são infinitos, devemos dividir a integral em um ponto real para conseguir aplicar e analisar os dois limites independentemente.

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= \lim_{p \rightarrow -\infty} \int_p^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^q \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= \lim_{p \rightarrow -\infty} [\arctan(x)]_p^0 + \lim_{q \rightarrow \infty} [\arctan(x)]_0^q \\
 &= \arctan(0) - \lim_{p \rightarrow -\infty} \arctan(p) + \lim_{q \rightarrow \infty} \arctan(q) - \arctan(0) \\
 &= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi
 \end{aligned}$$

Conclusão: A integral **converge**.

- (f) A função possui uma descontinuidade em $x = 3$, portanto, aplicamos o limite lateral pela esquerda e em seguida uma substituição de variáveis:

- Substituição: $u = 3 - x$ $\begin{cases} x = 0 \rightarrow u = 3 \\ x = t \rightarrow u = 3 - t \end{cases}$
- Diferencial: $du = -dx$

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx &= \lim_{t \rightarrow 3^-} \int_0^t (3-x)^{-1/2} dx = \lim_{t \rightarrow 3^-} \int_3^{3-t} u^{-1/2} (-du) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 3^-} [-2u^{1/2}]_3^{3-t} = \lim_{t \rightarrow 3^-} [-2\sqrt{3-x}]_0^t = -2(0) + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Conclusão: A integral **converge**.

- (g) A função $\tan(x)$ tende ao infinito quando $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} \tan(x) dx &= \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} \int_0^t \tan(x) dx \\
 &= \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} [-\ln|\cos x|]_0^t \\
 &= \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} [-\ln(\cos t)] - (-\ln(\cos 0)) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} -\ln(\cos t) + \ln(1)
 \end{aligned}$$

Aplicando o limite $\lim_{t \rightarrow \pi/2^-} -\ln(\cos t) = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\ln(0) = -(-\infty) = \infty$

Conclusão: A integral **diverge**.

- (h) Trata-se de uma integral imprópria do Tipo 2, já que a função $\ln(x)$ não é definida em $x = 0$. Aplicando integração por partes

- $u = \ln(x) \implies du = \frac{dx}{x}$
- $dv = x dx \implies v = \frac{x^2}{2}$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x \ln(x) dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x \ln(x) dx \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_t^1 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} \right]_t^1 \\
 &= \left(\frac{1}{2} \ln(1) - \frac{1}{4} \right) - \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{t^2}{2} \ln(t) - \frac{t^2}{4} \right) \\
 &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} (t^2 \ln t)
 \end{aligned}$$

Para resolver a indeterminação $0 \cdot (-\infty)$, reescrevemos e aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (t^2 \ln t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{1/t^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1/t}{-2/t^3} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^3}{-2t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{t^2}{2} = 0$$

Conclusão: $\int_0^1 x \ln(x) dx = -\frac{1}{4}$, portanto, a integral **converge**.

- (i) Cuidado! A função $\frac{1}{x^2}$ não é contínua em torno do ponto $x = 0$. Para avaliar a integral no intervalo $[-1, 2]$, precisamos dividi-lo em duas partes, de modo a contornar a descontinuidade e avalia-la através dos limites laterais:

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^2 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{p \rightarrow 0^-} \int_{-1}^p \frac{1}{x^2} dx + \lim_{q \rightarrow 0^+} \int_q^2 \frac{1}{x^2} dx$$

Vamos analisar as componentes integrais individualmente

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^0 \frac{2}{x^2} dx &= \lim_{p \rightarrow 0^-} \int_{-1}^p x^{-2} dx = \lim_{p \rightarrow 0^-} \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_{-1}^p = \lim_{p \rightarrow 0^-} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^p \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{p} - \left(-\frac{1}{-1} \right) \right) = \lim_{p \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{p} \right) - 1 = \infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \frac{2}{x^2} dx &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \int_q^2 x^{-2} dx = \lim_{q \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_q^2 = \lim_{q \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_q^2 \\
 &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{q} \right) \right) = -\frac{1}{2} + \lim_{q \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{q} \right) = \infty
 \end{aligned}$$

Ambos as componentes integrais divergem, mas bastaria que uma das componentes divergisse para que a integral completa também divergisse.

Conclusão: A integral **diverge**.

Áreas e volumes

12. Esboce a região limitada pelas curvas dadas e calcule a sua área. Decida se é mais eficiente integrar em relação a x ou a y .
- (a) Parábolas $y = 12 - x^2$ e $y = x^2 - 6$.
- (b) Parábolas horizontais $x = 2y^2$ e $x = 4 + y^2$.
- (c) Curvas $y = \sin x$ e $y = \cos x$ no intervalo $[0, \pi/2]$.

Solution:

(a) Parábolas $y_1 = 12 - x^2$ e $y_2 = x^2 - 6$.

1. Pontos de Interseção:

$$12 - x^2 = x^2 - 6 \Rightarrow 18 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 9 \therefore x = \pm 3$$

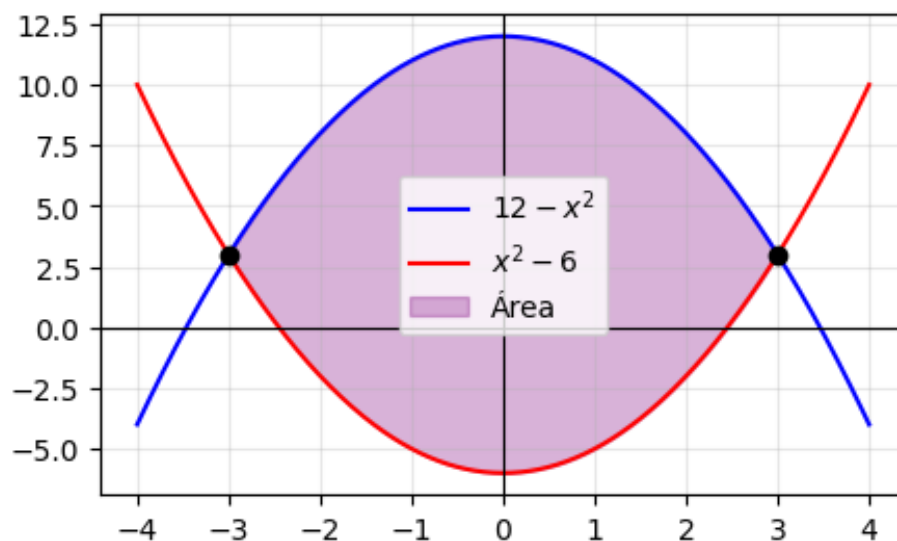
2. Definição das Curvas Superior e Inferior:

- $y_1(0) = 12 - 0^2 = 12$ (Curva Superior).
- $y_2(0) = 0^2 - 6 = -6$ (Curva Inferior).

Portanto, a altura do retângulo infinitesimal é $h(x) = (12 - x^2) - (x^2 - 6)$.

3. Cálculo da área:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^3 [(12 - x^2) - (x^2 - 6)] dx = \int_{-3}^3 (12 - x^2 - x^2 + 6) dx = \int_{-3}^3 (18 - 2x^2) \\ &= \left[18x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-3}^3 = \left(\left[18(3) - \frac{2(3)^3}{3} \right] - \left[18(-3) - \frac{2(-3)^3}{3} \right] \right) \\ &= \left(\left[54 - \frac{2 \cdot 9}{3} \right] - \left[-54 - \frac{2 \cdot (-9)}{3} \right] \right) = ([54 - 18] - [-54 + 18]) = 72 \end{aligned}$$



(b) Parábolas horizontais $x = 2y^2$ e $x = 4 + y^2$.

1. Pontos de Interseção:

$$2y^2 = 4 + y^2 \Rightarrow y^2 = 4 \therefore y = \pm 2$$

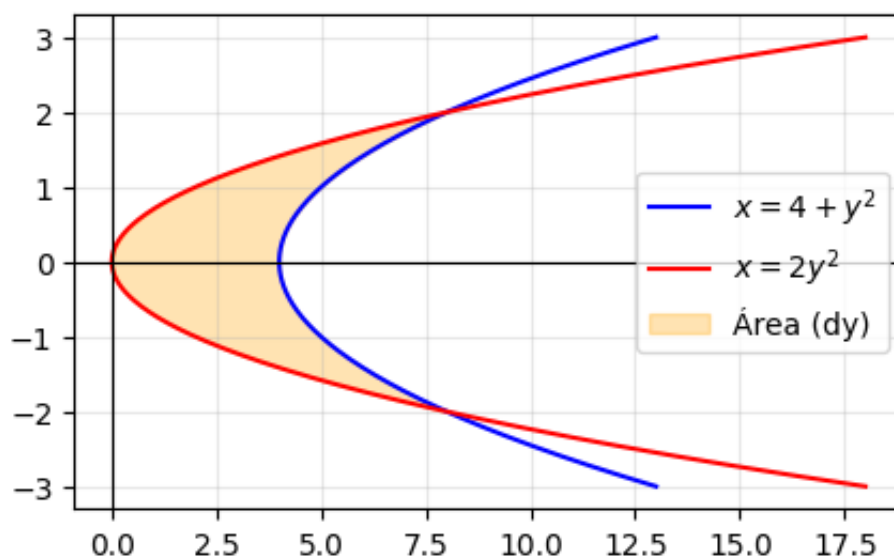
2. Definição das Curvas Direita e Esquerda:

- $x_1(0) = 2(0)^2 = 0$ (Esquerda).
- $x_2(0) = 4 + 0^2 = 4$ (Direita).

Portanto, a largura do retângulo horizontal é $(4 + y^2) - (2y^2)$.

3. Cálculo da área:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 [(4 + y^2) - (2y^2)] dy = \int_{-2}^2 (4 - y^2) dy = \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^2 \\ &= \left(\left[4(2) - \frac{2^3}{3} \right] - \left[4(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right] \right) = \left(\left[8 - \frac{16}{3} \right] - \left[-8 - \frac{16}{3} \right] \right) = \frac{16}{3} \end{aligned}$$



(c) Curvas $y = \sin x$ e $y = \cos x$ no intervalo $[0, \pi/2]$.

1. Pontos de Interseção: Igualamos as funções para verificar se elas se cruzam dentro do intervalo:

$$\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

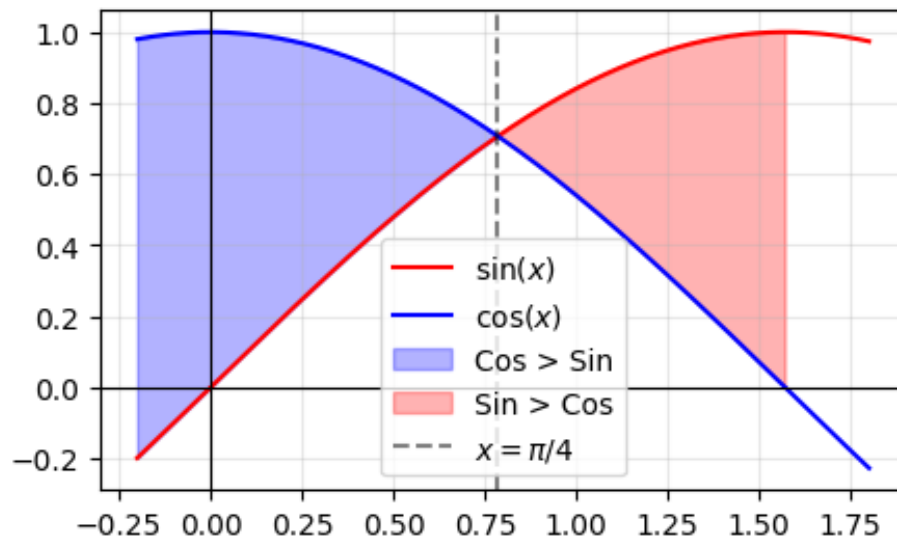
Como $\frac{\pi}{4}$ está em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, precisamos dividir a região em duas.

2. Definição das Curvas Superior e Inferior:

- Intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: $\sin(0) = 0$ e $\cos(0) = 1$, portanto, $\cos x \geq \sin x$.
- intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$: $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, portanto, $\sin x \geq \cos x$.

3. Cálculo da área: A área total é a soma das áreas das duas sub-regiões:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx \\
 &= [\sin x - (-\cos x)]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
 &= \left[\left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) - (\sin 0 + \cos 0) \right] - \left[\left(\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \right) - \left(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \right) \right] \\
 &= \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - (0 + 1) \right] - \left[(0 + 1) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = 2\sqrt{2} - 2 \approx 0,828
 \end{aligned}$$



13. Utilize o método dos Discos ou Arruelas para calcular o volume gerado pela rotação.

- (a) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$ em torno do **eixo x**.
- (b) $y = x^2$ e $y = 2x$ em torno do **eixo x**.
- (c) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$ em torno do **eixo y**.

Solution:

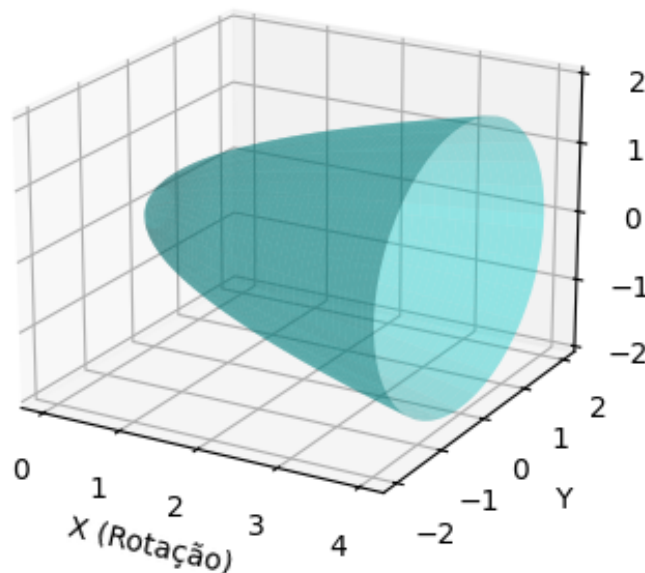
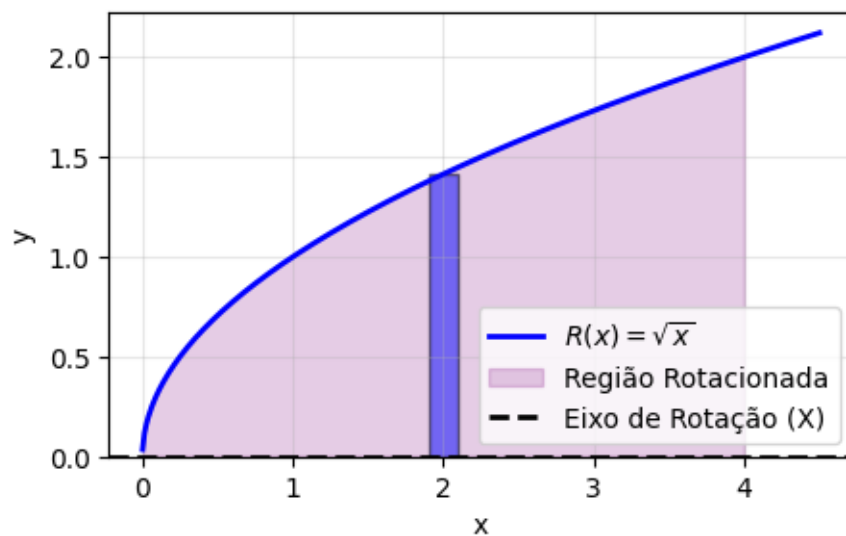
- (a) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$ em torno do eixo x. **1. Análise Geométrica:** A região está delimitada superiormente por $y = \sqrt{x}$ e inferiormente pelo eixo x ($y = 0$), de $x = 0$ até $x = 4$. Ao girar essa região em torno do eixo x, geramos um sólido maciço (sem buracos). Portanto, utilizamos o **Método dos Discos**.

O volume de um disco infinitesimal é $dV = \pi[R(x)]^2 dx$.

- Raio do disco: $R(x) = y = \sqrt{x}$.
- Limites de integração: $a = 0$ e $b = 4$.

2. Cálculo do volume:

$$V = \int_0^4 \pi(\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi \left(\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 8\pi \approx 25,13$$



(b) $y = x^2$ e $y = 2x$ em torno do eixo x .

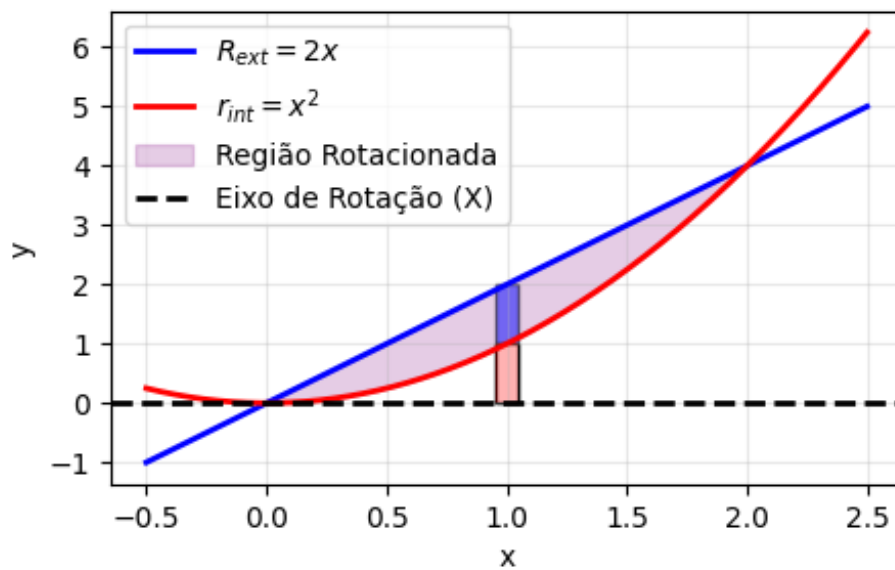
1. Pontos de Interseção:

$$x^2 = 2x \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x - 2) = 0 \therefore x = 0 \text{ e } x = 2$$

2. Análise Geométrica: No intervalo $[0, 2]$, a reta $y = 2x$ está acima da parábola $y = x^2$ (teste $x = 1$: $2 > 1$). Ao girar em torno do eixo x , a reta gera a superfície externa e a parábola gera a superfície interna (o buraco). Portanto, utilizamos o **Método das Arruelas**.

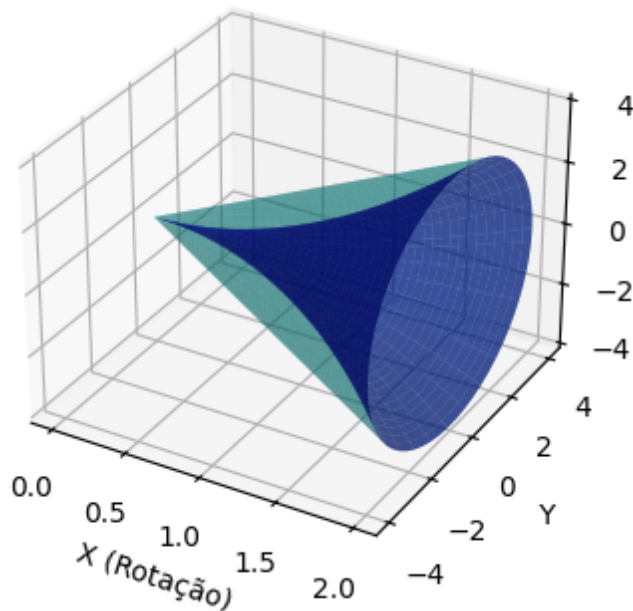
O volume de uma arruela infinitesimal é $\pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)$.

- Raio Externo (R): Distância do eixo à curva mais afastada $R(x) = 2x$.
- Raio Interno (r): Distância do eixo à curva mais próxima $r(x) = x^2$.



3. Cálculo do volume:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^2 [(2x)^2 - (x^2)^2] dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 \\
 &= \pi \left(\left[\frac{4(8)}{3} - \frac{32}{5} \right] - 0 \right) = 32\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = 32\pi \left(\frac{5-3}{15} \right) = \frac{64\pi}{15} \approx 13,40
 \end{aligned}$$



(c) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$ em torno do eixo y.

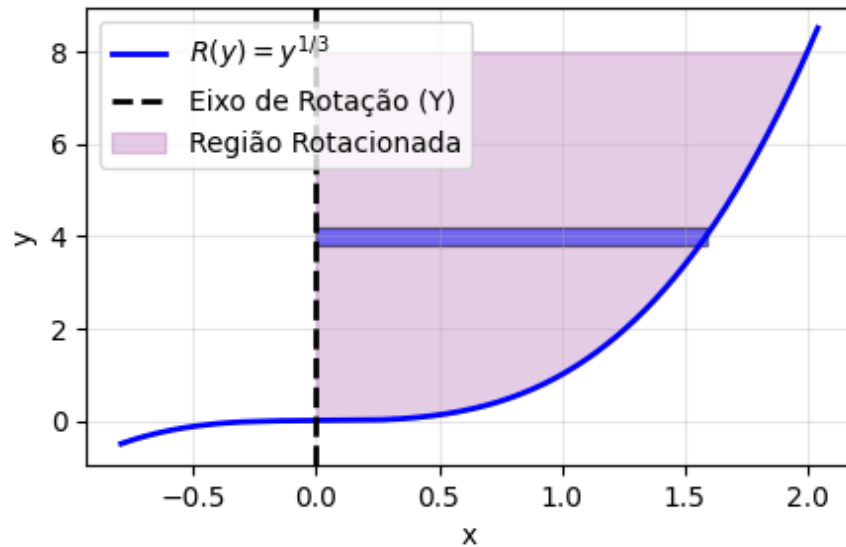
1. Análise Geométrica: A região está delimitada pela curva cúbica, a reta horizontal $y = 8$ e o próprio eixo y ($x = 0$). A rotação é em torno do eixo y. Como a região encosta no eixo de rotação, não há buraco central. Usaremos o **Método dos Discos** com integração em y.

2. Inversão da Função: Precisamos expressar o raio R em termos de y .

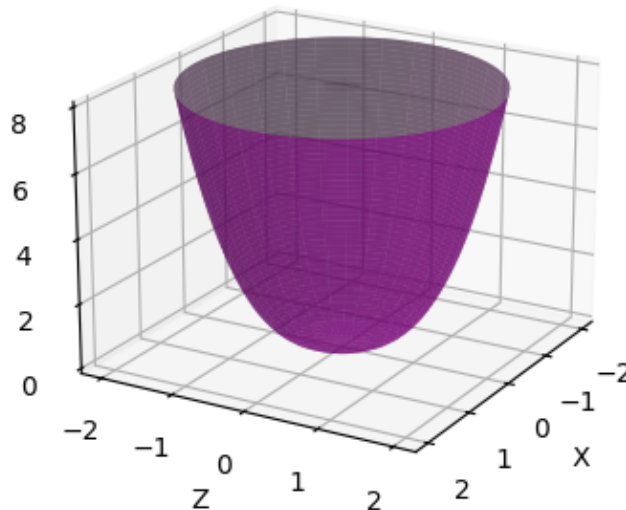
$$y = x^3 \implies x = \sqrt[3]{y} = y^{1/3}$$

O raio do disco na altura y é $R(y) = y^{1/3}$, com $0 \leq y \leq 8$

3. Cálculo do volume:



$$V = \pi \int_0^8 (y^{1/3})^2 dy = \pi \int_0^8 y^{2/3} dy = \pi \left[\frac{y^{(2/3)+1}}{(2/3)+1} \right]_0^8 = \pi \left[\frac{y^{5/3}}{5/3} \right]_0^8 = \frac{3\pi}{5} (32 - 0) = \frac{96\pi}{5}$$



14. Utilize o método das Cascas Cilíndricas para calcular o volume gerado pela rotação.

(a) $y = x - x^2$ e $y = 0$ em torno do **eixo y** .

(b) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ e $x = 4$ em torno do **eixo y** .

(c) $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$ em torno da reta vertical $x = 2$.

Solution:

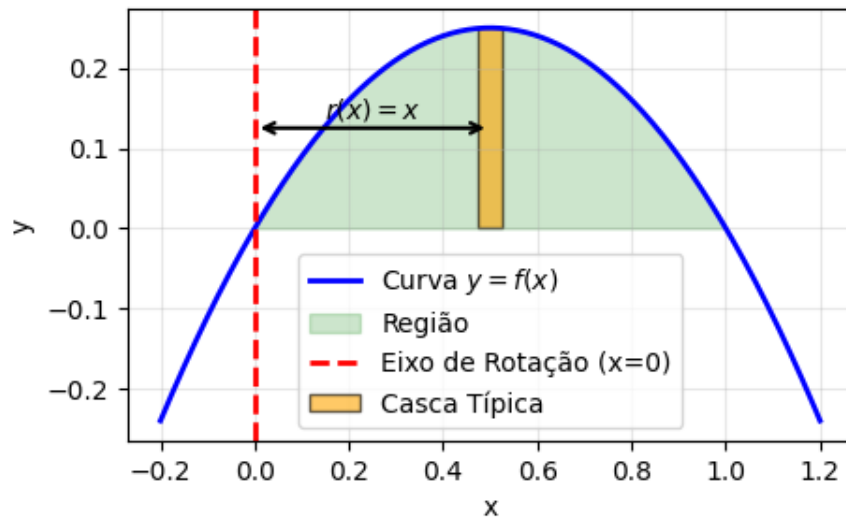
(a) $y = x - x^2$ e $y = 0$ em torno do eixo y .

1. Escolha do Método: Se tentássemos usar discos (fatias horizontais), seria necessário integrar a função $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y}}{2}$. O método **das Cascas Cilíndricas** nos permite integrar em x , usando a altura vertical da função.

2. Geometria da Casca:

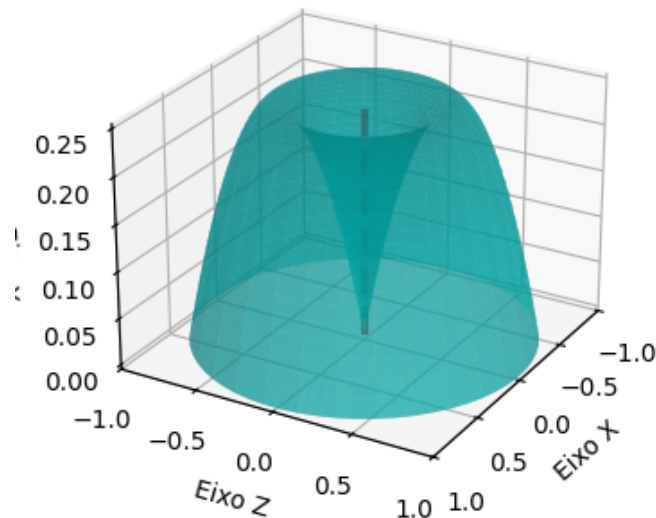
$$dV = 2\pi \cdot (\text{raio}) \cdot (\text{altura}) \cdot (\text{espessura})$$

- **Raio (r):** Distância da casca até o eixo de rotação, portanto, $r = x$.
- **Altura (h):** A altura da curva no ponto x , portanto, $h = y = x - x^2$.



3. Cálculo do volume:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi(x)(x - x^2) dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\ &= 2\pi \left(\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] - 0 \right) = 2\pi \left(\frac{4-3}{12} \right) = 2\pi \left(\frac{1}{12} \right) = \frac{\pi}{6} \approx 0,5236 \end{aligned}$$

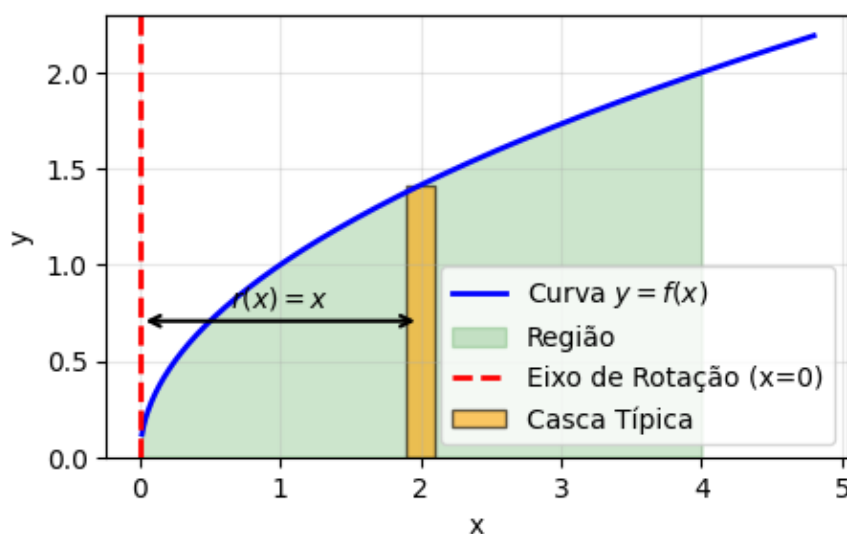


(b) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ e $x = 4$ em torno do eixo y .

1. Análise Geométrica: A região é delimitada pela curva $y = \sqrt{x}$, pelo eixo y ($x = 0$) e pela reta vertical $x = 4$. Assumimos que a região é limitada inferiormente pelo eixo x ($y = 0$), que é o padrão para "área sob a curva" a menos que especificado o contrário. Usaremos **Cascas Cilíndricas** para integrar em x (verticalmente), o que é mais direto do que inverter a função para $x = y^2$ e usar discos horizontais.

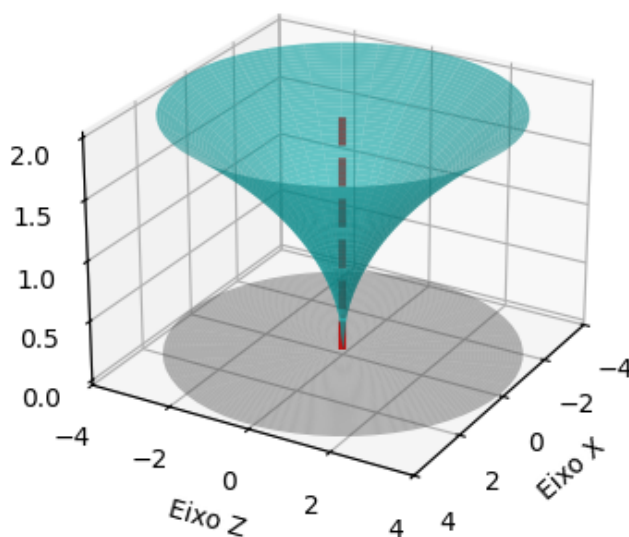
2. Geometria da Casca:

- **Raio (r):** Distância ao eixo de rotação (eixo y) $\rightarrow r = x$.
- **Altura (h):** Altura da curva nesse ponto $\rightarrow h = \sqrt{x}$.



3. Cálculo do volume:

$$V = \int_0^4 2\pi(x)(\sqrt{x}) dx = 2\pi \int_0^4 x^{3/2} dx = 2\pi \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_0^4 = \frac{4\pi}{5} [(\sqrt{4})^5 - 0] = \frac{128\pi}{5}$$

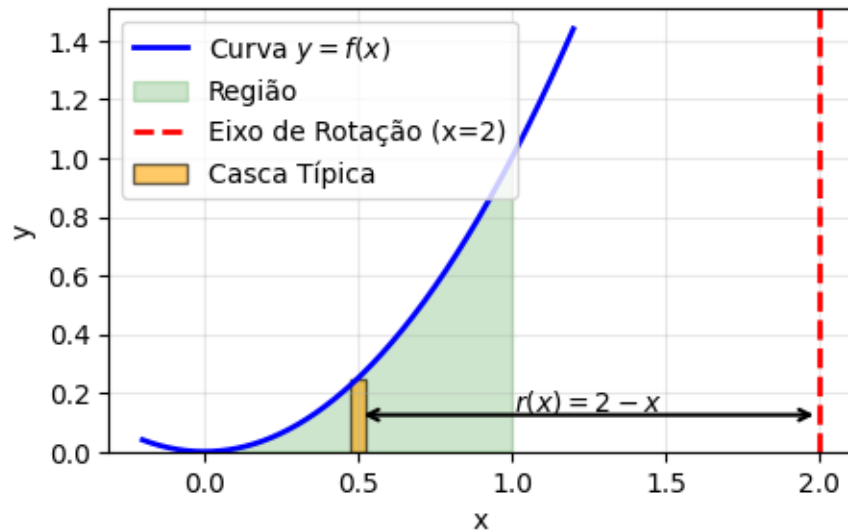


(c) $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$ em torno da reta vertical $x = 2$.

1. Análise Geométrica: A região está no primeiro quadrante, delimitada por $y = x^2$, o eixo x ($y = 0$) e a reta vertical $x = 1$. O intervalo de integração em x é $[0, 1]$. A rotação ocorre em torno de $x = 2$, que está à direita da região.

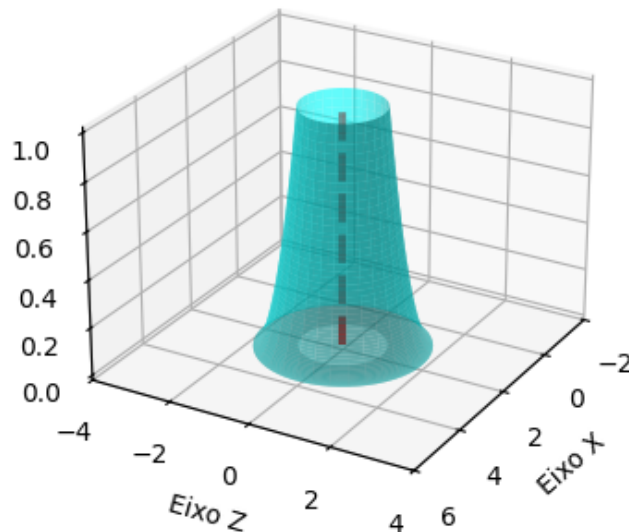
2. Geometria da Casca (Eixo Deslocado):

- **Altura (h):** É a altura da curva no ponto x . $h(x) = x^2$.
- **Raio (r):** É a distância horizontal entre a casca (em x) e o eixo de rotação (em 2). Como a região está em $0 \leq x \leq 1$ e o eixo é $x = 2$, o raio é $r = 2 - x$.



3. Cálculo do volume:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 2\pi(2-x)(x^2) dx = 2\pi \int_0^1 (2x^2 - x^3) dx = 2\pi \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\
 &= 2\pi \left(\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right] - 0 \right) = 2\pi \left(\frac{8-3}{12} \right) = 2\pi \left(\frac{5}{12} \right) = \frac{5\pi}{6} \approx 2,618
 \end{aligned}$$



15. Determine o volume do sólido cuja base é a região circular $x^2 + y^2 = 1$ e as seções transversais perpendiculares ao eixo x são quadrados.

Solution:

1. Análise Geométrica: O volume de um sólido definido por seções transversais conhecidas é dado por $V = \int_a^b A(x) dx$, onde $A(x)$ é a área da seção em x .

- **Base:** Um círculo de raio 1 centrado na origem ($x^2 + y^2 = 1$). Para um dado x , a base se estende de $y = -\sqrt{1 - x^2}$ até $y = +\sqrt{1 - x^2}$.
- **Lado do Quadrado (L):** O lado do quadrado "apoia-se" na base circular. O comprimento do lado é a distância vertical entre a parte superior e inferior do círculo:

$$L(x) = y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}} = \sqrt{1 - x^2} - (-\sqrt{1 - x^2}) = 2\sqrt{1 - x^2}$$

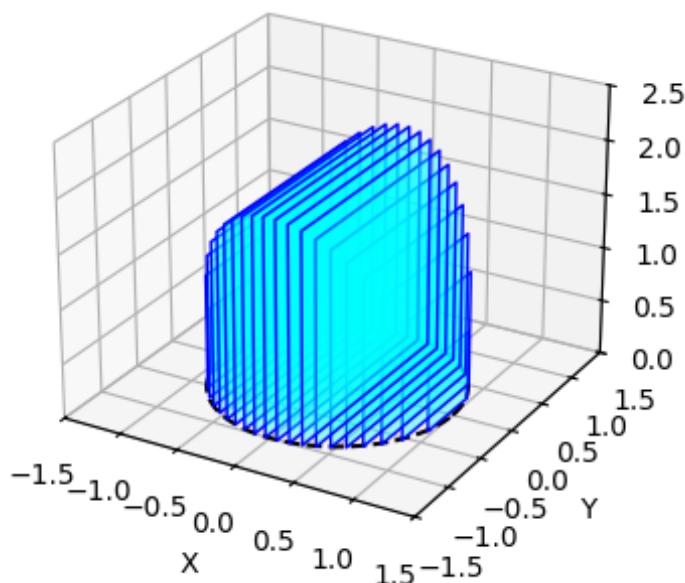
- **Área da Seção ($A(x)$):** Como as seções são quadrados, a área é o lado ao quadrado:

$$A(x) = [L(x)]^2 = (2\sqrt{1 - x^2})^2 = 4(1 - x^2)$$

- **Limites:** O círculo vai de $x = -1$ até $x = 1$.

2. Cálculo do volume

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 4(1 - x^2) dx = 4 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = 4 \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) \right] \\ &= 4 \left[\left(\frac{3-1}{3} \right) - \left(\frac{-3+1}{3} \right) \right] = 4 \left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right] = 4 \left[\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right] = \frac{16}{3} \end{aligned}$$



Aplicações de integral

16. Calcule o comprimento da curva $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ no intervalo $[1, 2]$.

Solution: O comprimento de arco de uma curva $y = f(x)$ em $[a, b]$ é dado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Derivar a função

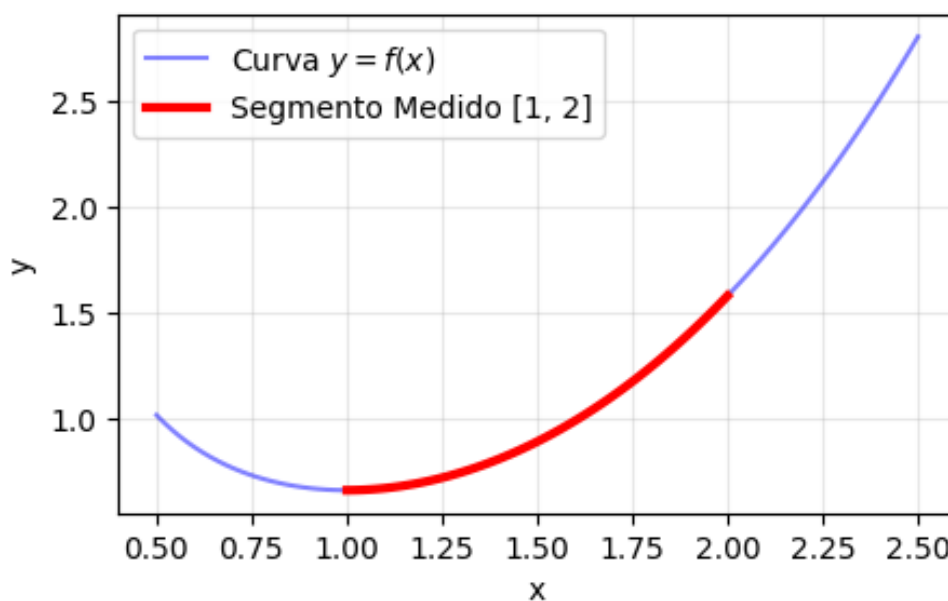
$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^{-1} \right) = \frac{3}{6}x^2 - \frac{1}{2}x^{-2} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$$

Simplificar o termo dentro da raiz $(1 + (y')^2)$

$$\begin{aligned} 1 + [f'(x)]^2 &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} \right)^2 = 1 + \left(\frac{x^4}{4} - 2 \left(\frac{x^2}{2} \right) \left(\frac{1}{2x^2} \right) + \frac{1}{4x^4} \right) \\ &= 1 + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4} = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4} = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Calcular o comprimento

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} \right)^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^{-2}}{2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{x^{-1}}{-1} \right) \right]_1^2 \\ &= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{1}{2x} \right]_1^2 = \left(\frac{8}{6} - \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{16-3}{12} \right) - \left(-\frac{2}{6} \right) = \frac{13}{12} + \frac{4}{12} = \frac{17}{12} \end{aligned}$$



17. Encontre a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = x^3$, com $0 \leq x \leq 1$, em torno do **eixo x**.

Solution: A área da superfície S gerada pela rotação de uma função $y = f(x)$ em torno do eixo x é dada por:

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

O termo $2\pi y$ representa a circunferência da fatia e o termo radical representa o comprimento de arco infinitesimal (ds).

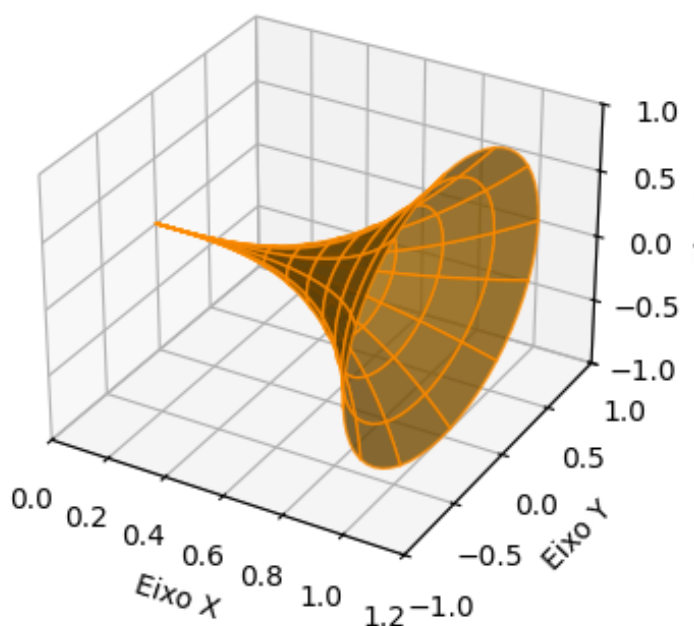
Derivar a função

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (x^3) = 3x^2 \implies [f'(x)]^2 = (3x^2)^2 = 9x^4$$

Calcular a área Utilizaremos o método de integração por partes

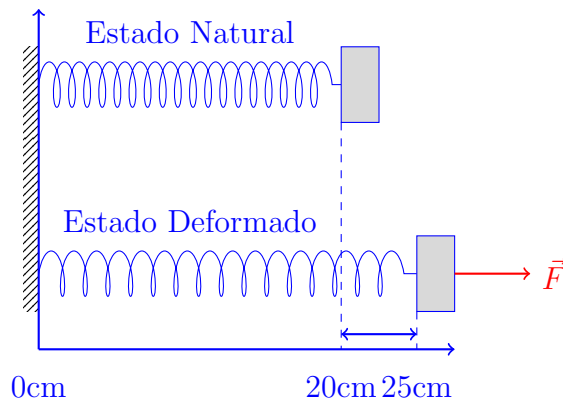
- Substituição: $u = 1 + 9x^4$.
- Diferencial: $du = 36x^3 dx \implies x^3 dx = \frac{du}{36}$.
- Novos Limites:
 - Se $x = 0 \implies u = 1 + 0 = 1$.
 - Se $x = 1 \implies u = 1 + 9 = 10$.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 2\pi(x^3)\sqrt{1 + 9x^4} dx = 2\pi \int_1^{10} \sqrt{u} \cdot \frac{du}{36} = \frac{2\pi}{36} \int_1^{10} u^{1/2} du \\ &= \frac{\pi}{18} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_1^{10} = \frac{\pi}{18} \cdot \frac{2}{3} [u\sqrt{u}]_1^{10} = \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1\sqrt{1}) \approx 3,56 \end{aligned}$$



18. Uma mola tem um comprimento natural de 20 cm, sendo necessária uma força de 25 N para mantê-la esticada num comprimento de 30 cm. Quanto trabalho é realizado para esticar a mola de 20 cm até 25 cm?

Solution: Pela Lei de Hooke, a força necessária para manter uma mola esticada x unidades além do seu comprimento natural é $F(x) = kx$. O trabalho realizado é dado pela integral da força: $W = \int_a^b kx \, dx$.



Determinar a constante da mola

- $L_0 = 20 \text{ cm} = 0,20 \text{ m}$.
- $L_1 = 30 \text{ cm} = 0,30 \text{ m}$.
- Deformação: $x = 0,10 \text{ m}$.
- Força aplicada: $F = 25 \text{ N}$.

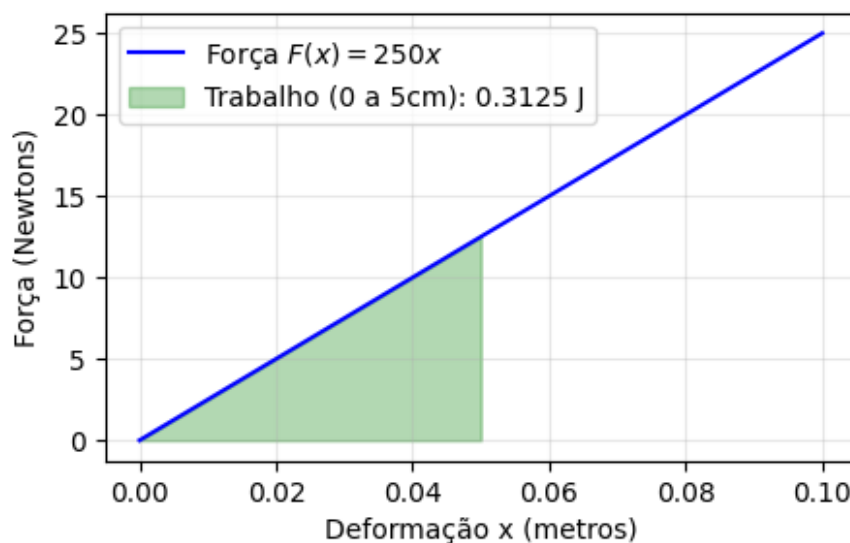
$$F(x) = kx \implies 25 = k(0,1) \implies k = \frac{25}{0,1} = 250 \text{ N/m}$$

Definir os limites de integração

- Limite inferior (a): Começa no comprimento natural de 20cm ($x = 0$).
- Limite superior (b): Termina esticado com 25cm ($x = 0,05$).

Calcular o Trabalho

$$W = \int_0^{0,05} 250x \, dx = \left[\frac{250x^2}{2} \right]_0^{0,05} = 125 [(0,05)^2 - 0^2] = 125(0,0025) = 0,3125 \text{ J}$$

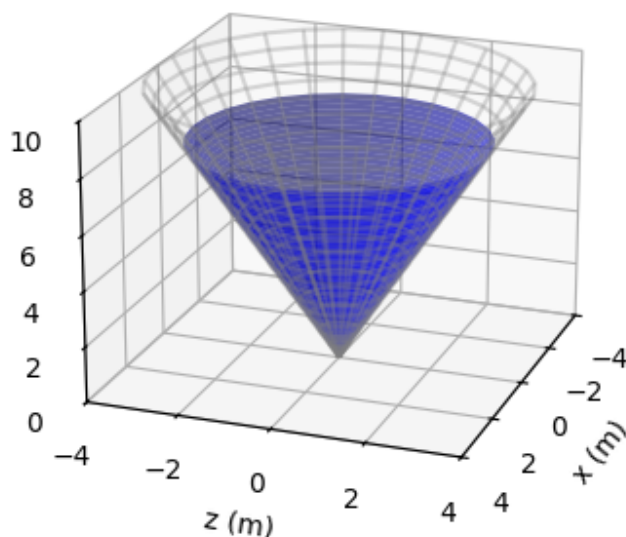


19. Um tanque tem a forma de um cone circular invertido com altura de 10 m e raio da base 4 m, e está cheio de água até a altura de 8 m. Calcule o trabalho realizado para bombear toda a água para a borda superior do tanque. (Considere o peso específico da água $\gamma = 9800 \text{ N/m}^3$).

Solution: O trabalho é definido como $W = \int \text{distância} \cdot dF$, onde dF é o peso de uma fatia infinitesimal de água.

Sistema de Coordenadas:

- Fundo do tanque: $y = 0$.
- Topo do tanque: $y = 10$.
- Nível da água: $0 < y < 8$.



Geometria da Fatia (Disco em y):

Por semelhança de triângulos entre o cone cheio e o cone formado pela água no nível y :

$$\frac{\text{raio } r}{y} = \frac{\text{Raio Total } R}{\text{Altura Total } H} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Logo, o raio da fatia na altura y é $r(y) = \frac{2}{5}y$.

Peso da Fatia (dF):

$$\text{Volume } dV = \pi[r(y)]^2 dy = \pi \left(\frac{2}{5}y\right)^2 dy = \frac{4\pi}{25}y^2 dy$$

$$\text{Peso } dF = \gamma dV = 9800 \cdot \frac{4\pi}{25}y^2 dy = 1568\pi y^2 dy$$

Distância de Deslocamento:

Uma fatia que está na altura y precisa ser elevada até a borda do tanque ($y = 10$).

$$\text{Distância} = 10 - y$$

Calcular o Trabalho:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^8 (10 - y) \cdot (1568\pi y^2) dy = 1568\pi \int_0^8 (10y^2 - y^3) dy = 1568\pi \left[\frac{10y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^8 \\ &= 1568\pi \left(\frac{10(512)}{3} - \frac{4096}{4} \right) = 1568\pi \left(\frac{5120 - 3072}{3} \right) = 1568\pi \left(\frac{2048}{3} \right) \end{aligned}$$

O trabalho necessário é aproximadamente $W \approx 3,36 \times 10^6$ Joules.

20. Encontre as coordenadas do centróide $(\bar{x}, \bar{y})$ da região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ no primeiro quadrante.

Solution: As fórmulas para o centróide de uma região limitada por $f(x)$ (superior) e $g(x)$ (inferior) de a até b são:

- Área: $A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$
- Momento em y: $M_y = \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx \implies \bar{x} = \frac{M_y}{A}$
- Momento em x: $M_x = \int_a^b \frac{1}{2}([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx \implies \bar{y} = \frac{M_x}{A}$

Definir a Região Interseção: $x = x^2 \implies x^2 - x = 0 \implies x(x-1) = 0$. Pontos $x = 0$ e $x = 1$. No intervalo $(0, 1)$, $x > x^2$, logo $f(x) = x$ (teto) e $g(x) = x^2$ (chão).

Calcular a Área (A)

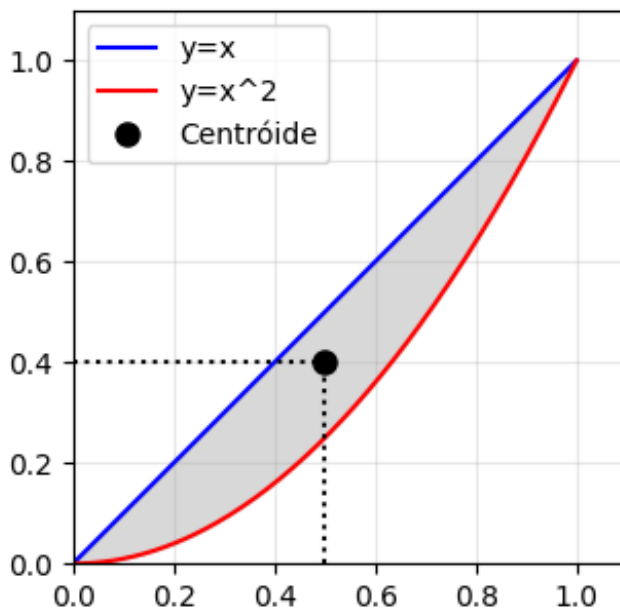
$$A = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6}$$

Calcular o momento em y (M_y)

$$M_y = \int_0^1 x(x - x^2) dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Calcular o momento em x (M_x)

$$M_x = \int_0^1 \frac{1}{2}((x)^2 - (x^2)^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{15}$$



Calcular $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{1/12}{1/6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Calcular $\bar{y}$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{1/15}{1/6} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

O centróide é $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5} \right)$

21. Uma partícula move-se sobre uma linha reta com velocidade $v(t) = t^2 - 2t - 8$ m/s. Para o intervalo de tempo $1 \leq t \leq 6$:
- Encontre o deslocamento da partícula.
 - Encontre a distância total percorrida.

Solution:

(a) O deslocamento (Δs) é a integral definida da velocidade:

$$\begin{aligned}\Delta s &= \int_1^6 v(t) dt = \int_1^6 (t^2 - 2t - 8) dt = \left[\frac{t^3}{3} - t^2 - 8t \right]_1^6 \\ &= \left(\frac{6^3}{3} - 6^2 - 8(6) \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 - 8(1) \right) = \left(\frac{216}{3} - 36 - 48 \right) - \left(\frac{1}{3} - 9 \right) \\ &= (72 - 84) - \left(\frac{1}{3} - \frac{27}{3} \right) = -12 - \left(-\frac{26}{3} \right) = -\frac{36}{3} + \frac{26}{3} = -\frac{10}{3} \text{ m}\end{aligned}$$

O sinal de Δs indica que a posição final está à esquerda da posição inicial.

(b) A distância total (D) é a integral do valor absoluto da velocidade (rapidez):

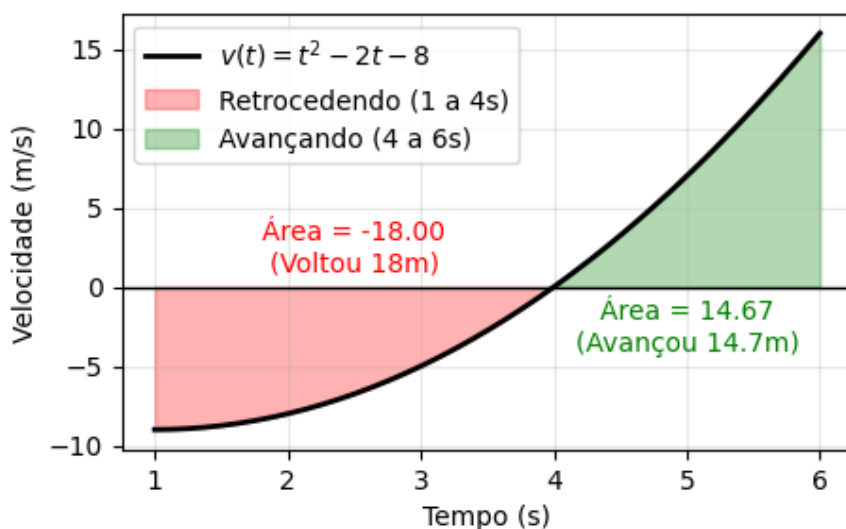
$$D = \int_1^6 |v(t)| dt = \int_1^6 |t^2 - 2t - 8| dt$$

$$t^2 - 2t - 8 = 0 \implies (t - 4)(t + 2) = 0 \therefore t = -2 \text{ e } t = 4$$

No intervalo $[1, 6]$, a mudança de sinal ocorre em $t = 4$.

- No intervalo $[1, 4]$: $v(2) = 4 - 4 - 8 = -8 < 0$. Logo, $|v(t)| = -v(t)$.
- No intervalo $[4, 6]$: $v(5) = 25 - 10 - 8 = 7 > 0$. Logo, $|v(t)| = v(t)$.

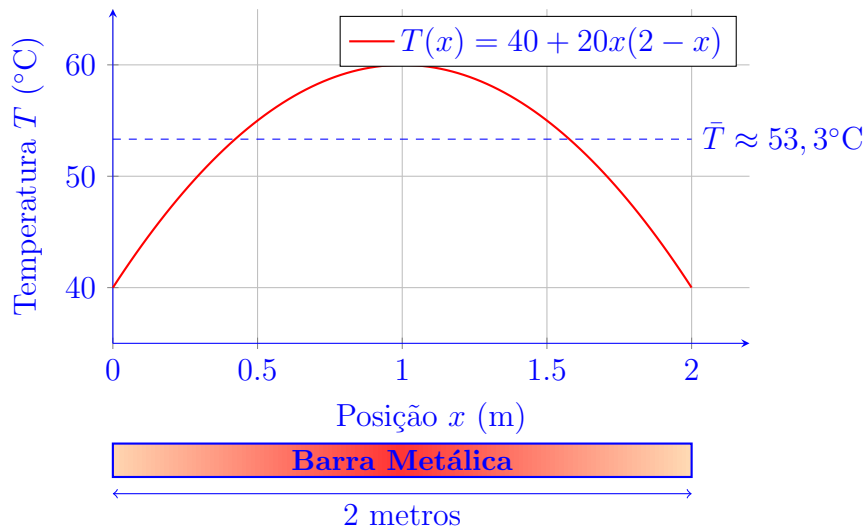
$$\begin{aligned}D &= \int_1^4 -(t^2 - 2t - 8) dt + \int_4^6 (t^2 - 2t - 8) dt = \left[\frac{t^3}{3} - t^2 - 8t \right]_1^6 - \left[\frac{t^3}{3} - t^2 - 8t \right]_1^4 \\ &= \left[\left(\frac{216}{3} - 36 - 48 \right) - \left(\frac{64}{3} - 16 - 32 \right) \right] - \left[\left(\frac{64}{3} - 16 - 32 \right) - \left(\frac{64}{3} - 1 - 8 \right) \right] \\ &= \left[\left(\frac{216 - 108 - 144}{3} \right) - 2 \left(\frac{64 - 48 - 96}{3} \right) + \left(\frac{1 - 3 - 24}{3} \right) \right] = \frac{98}{3} \approx 32,67 \text{ m}\end{aligned}$$



22. Uma barra metálica com 2 metros de comprimento tem sua temperatura T (graus Celsius) descrita pela expressão $T(x) = 40 + 20x(2 - x)$, onde x é a distância medida a partir de uma das extremidades. Calcule a temperatura média da barra.

Solution: A temperatura média T_{med} de uma barra de comprimento L (de $x = 0$ a $x = L$) é dada pela integral da função temperatura dividida pelo comprimento:

$$\begin{aligned} T_{\text{med}} &= \frac{1}{L} \int_0^L T(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (40 + 40x - 20x^2) dx = \frac{1}{2} \left[40x + \frac{40x^2}{2} - \frac{20x^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(40(2) + 20(2)^2 - \frac{20(2)^3}{3} \right) - 0 \right] = \frac{160}{2} - \frac{160}{6} = \frac{320}{6} \approx 53,33^\circ\text{C} \end{aligned}$$



23. Uma população de bactérias cresce a uma taxa de $\frac{dP}{dt} = 1000e^{0.2t}$ bactérias por hora. Se a população inicial era de 500 bactérias, qual será a população após 5 horas?

Solution: Sabemos que a população $P(t)$ é a primitiva da taxa de crescimento.

- Substituição: $u = 0.2t$
- Diferencial: $du = 0.2dt \implies dt = 5u$

$$P(t) = \int \frac{dP}{dt} dt = \int 1000e^{0.2t} dt = 1000 \int e^u \cdot 5 du = 5000e^u + C = 5000e^{0.2t} + C$$

Determinar a Constante C Aplicamos a condição inicial que em $t = 0$, a população é $P(0) = 500$.

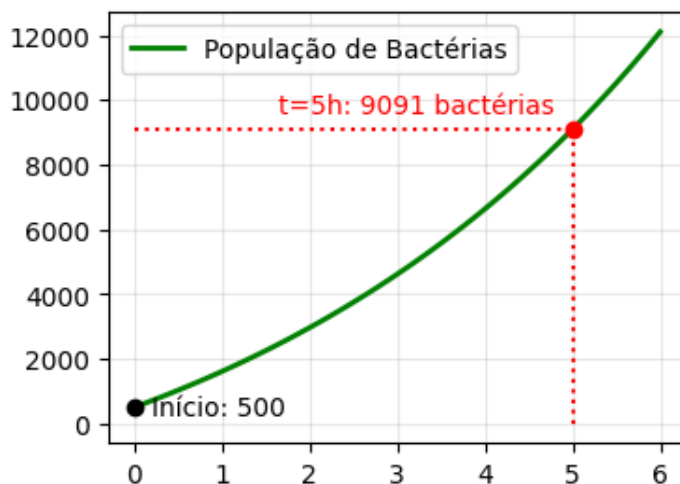
$$P(0) = 5000e^{0.2 \cdot 0} + C \implies 500 = 5000 \cdot e^0 + C \implies C = -4500$$

Logo, a função que descreve a população é:

$$P(t) = 5000e^{0.2t} - 4500$$

Calcular a população em $t = 5$

$$P(5) = 5000e^{0.2 \cdot 5} - 4500 = 5000e^1 - 4500 \approx 5000(2,71828) - 4500 \approx 9091$$

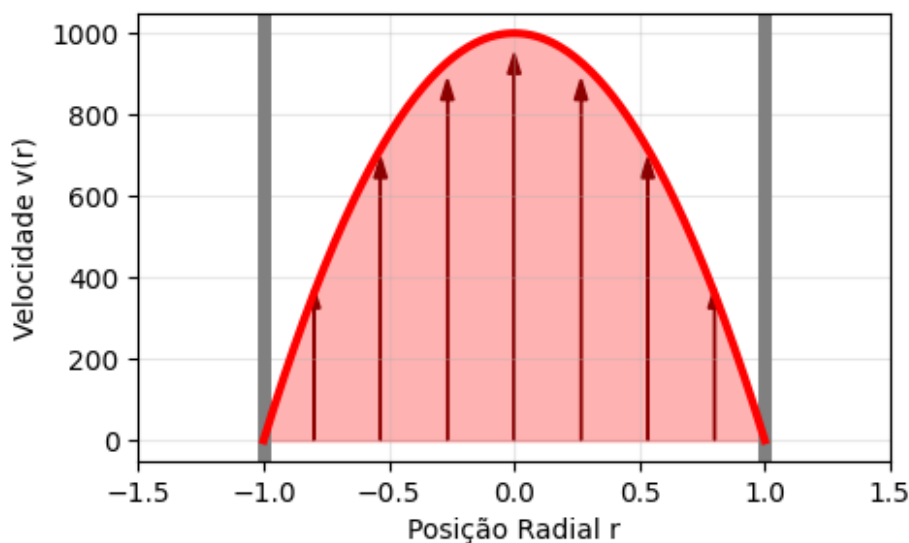


24. A velocidade do sangue numa artéria de raio R a uma distância r do eixo central é dada por $v(r) = C(R^2 - r^2)$, onde C é uma constante. Calcule o fluxo sanguíneo total através da artéria.

$$F = \int_0^R 2\pi r \cdot v(r) dr.$$

Solution: O fluxo total é a integral do perfil da velocidade sob os anéis de área.

$$\begin{aligned} F &= \int_0^R 2\pi r \cdot [C(R^2 - r^2)] dr = 2\pi C \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = 2\pi C \left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R \\ &= 2\pi C \left(\left[\frac{R^2(R)^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right] - 0 \right) = 2\pi C \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = 2\pi C \left(\frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi C R^4}{2} \end{aligned}$$

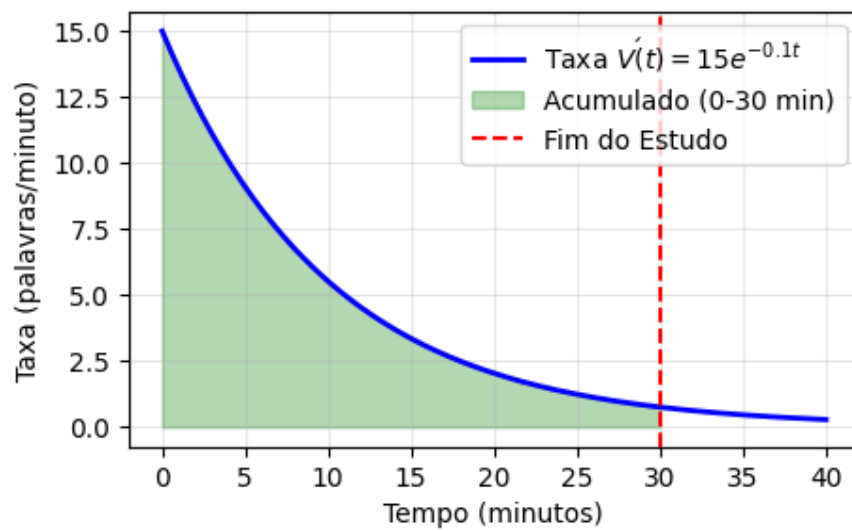


25. Um estudante de línguas é capaz de memorizar vocabulário a uma taxa dada por $V'(t) = 15e^{-0.1t}$ palavras por minuto, onde t é o tempo de estudo em minutos. Quantas palavras o estudante consegue memorizar nos primeiros 30 minutos de estudo?

Solution: A variação total na quantidade de palavras memorizadas V entre os instantes $t = a$ e $t = b$ é dada pela integral definida da taxa de variação $V'(t)$.

$$\begin{aligned} V_{\text{total}} &= \int_0^{30} V'(t) dt = \int_0^{30} 15e^{-0.1t} dt = 15 \left[\frac{e^{-0.1t}}{-0.1} \right]_0^{30} = [-150e^{-0.1t}]_0^{30} \\ &= (-150e^{-0.1(30)}) - (-150e^{-0.1(0)}) = 150(1 - e^{-3}) \approx 142,53 \end{aligned}$$

O estudante consegue memorizar aproximadamente 142 palavras.



Bons Estudos!!!

Apêndice A

Formulário de Referência

A.1 Fundamentos de Álgebra e Funções

Produtos Notáveis e Fatoração

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Potenciação e Radiciação

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^0 = 1$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Exponenciais e Logaritmos

- $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$
- $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$
- $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$
- $e^{\ln x} = x$
- $\log(a/b) = \log a - \log b$
- $\ln(e^x) = x$
- $\log(a^k) = k \ln a$
- $\ln x = \log_e x$

Fórmulas Geométricas

- **Distância euclidiana entre dois pontos:** $D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- **Círculo** (raio r): Área = πr^2 , Circunferência = $2\pi r$.
- **Esfera** (raio r): Volume = $\frac{4}{3}\pi r^3$, Área de Superfície = $4\pi r^2$.
- **Cilindro** (raio r , altura h): Volume = $\pi r^2 h$, Área da Superfície Lateral = $2\pi r h$.
- **Cone** (raio r , altura h): Volume = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

A.2 Identidades Trigonométricas

Quociente

- $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
- $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

Recíprocas

- $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$
- $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

Pitagóricas

- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$
- $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

Soma e Diferença de Dois Ângulos

- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Pares Impares

- $\sin(-\theta) = -\sin \theta$
- $\cos(-\theta) = \cos \theta$
- $\tan(-\theta) = -\tan \theta$
- $\csc(-\theta) = -\csc \theta$
- $\sec(-\theta) = \sec \theta$
- $\cot(-\theta) = -\cot \theta$

Ângulo Duplo

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$
- $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

Ângulo Médio

- $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$
- $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$
- $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$

Soma a Produto

- $\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$
- $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Produto a Soma

- $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$
- $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$
- $\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$

Identidades Complementares

- $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$
- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$
- $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$

A.3 Derivadas

Definição

Quociente de Newton

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Derivada em torno de a

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivadas Notáveis

- $\frac{d}{dx}(c) = 0$
- $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$
- $\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
- $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$
- $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$

Regras de Derivação

- **Regra do Produto:** $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- **Regra do Quociente:** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
- **Regra da Cadeia:** Se $h(x) = f(g(x))$, então $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- **Função Inversa:** $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$
- **Diferenciação Logarítmica:** $\left[f(x)^{g(x)}\right]' = f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln(f(x)) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right]$

Aproximações por Polinômios de Taylor

- **Polinômio de Taylor de Grau n (em torno de $x = a$):**

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

- **Polinômios de Maclaurin ($a = 0$):**

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

- **Aproximação de Funções Usuais**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

A.4 Integrais

Definição

$$\int_a^b f(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \quad \text{onde} \quad x_i^* = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} i \cdot \Delta x + a \quad \text{e} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Integrais Notáveis

• $\int k \, dx = kx + C$	• $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	• $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$
• $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	• $\int \cos x \, dx = \sin x + C$	• $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$
• $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$	• $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$	• $\int \sec x \, dx = \ln \sec x + \tan x $
• $\int e^x \, dx = e^x + C$	• $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$	• $\int \csc x \, dx = -\ln \csc x + \cot x $
• $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	• $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C$	• $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$

Técnicas de Integração

Substituição Simples

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Frações Parciais

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int \frac{A}{ax+b} + \int \frac{B}{cx+d}$$

Integração por Partes

LIATE: Log, Inv, Alg, Trig, Exp

$$\int u(x) \, dv = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \, du$$

Substituição Trigonométrica

- $\sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow x = a \sin \theta$
- $\sqrt{a^2 + x^2} \rightarrow x = a \tan \theta$
- $\sqrt{x^2 - a^2} \rightarrow x = a \sec \theta$

Integral Definida e Aplicações

Soma de Riemann

Esquerda:	$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x$	onde	$x_{i-1} = a + (i-1)\Delta x$	e	$\Delta x = \frac{b-a}{n}$
Direita:	$\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$	onde	$x_i = a + i\Delta x$	e	$\Delta x = \frac{b-a}{n}$
Ponto médio:	$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)\Delta x$	onde	$\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$	e	$\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Método dos Discos

$$V = \pi \int_a^b [R(y)]^2 \, dy$$

Teorema do Valor Médio

$$f_{med} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Método das Cascas Cilíndricas

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) \, dx$$

Apêndice B

Laboratório Virtual

Sobre este capítulo

Este espaço foi projetado para ambientar o estudante ao ecossistema do Google Colab, a infraestrutura que hospeda nosso Laboratório Virtual. Mais do que um manual técnico, este anexo detalha como interagir com os códigos em Python, manipular os simuladores e gerenciar seus notebooks. Compreender esta plataforma é o que permite transformar o seu navegador em um potente ambiente de experimentação, eliminando as barreiras entre a abstração teórica e a visualização dinâmica do cálculo diferencial e integral em uma variável.

Competências e habilidades

- **Alfabetização em Nuvem:** Compreender o funcionamento do ambiente Colab, executando notebooks diretamente no navegador sem a necessidade de instalações locais.
- **Interatividade Paramétrica:** Dominar o uso de sliders e menus dinâmicos para realizar a investigação de assíntotas, aproximações e áreas complexas.
- **Autonomia de Programação:** Identificar a estrutura básica da programação matemática, buscando autonomia para resolução de problemas complexos.
- **Gestão de Aprendizado Digital:** Desenvolver o fluxo de trabalho para manter backup e versionamento, testando melhorias em projetos escaláveis.

***Dica de Estudo:** Encare este apêndice como o seu treinamento de voo antes de entrar nas missões de cálculo. No Google Colab, você tem a liberdade de testar cenários extremos e alterar parâmetros sem o risco de corromper o sistema original. O poder do Python reside em automatizar a parte repetitiva para que você foque na interpretação dos fenômenos. Lembre-se que a tecnologia é uma extensão da sua visão para tornar o infinitesimal e o infinito algo palpável.*

B.1 Orientações para acesso

O Laboratório Virtual deste livro não reside em arquivos estáticos, ele é um organismo vivo hospedado no GitHub, a principal plataforma de desenvolvimento colaborativo do mundo. Para acessá-lo, você não precisa instalar compiladores ou configurar variáveis de ambiente complexas. Todo o processamento ocorre nos servidores de alto desempenho do Google através da infraestrutura do Colab.

O Fluxo de Acesso

Para iniciar sua jornada de experimentação, siga estes três passos fundamentais:

- **O Repositório Central:** Acesse o endereço oficial do projeto disponível ao final desse capítulo, onde você encontrará a lista de arquivos Notebooks Jupyter organizados de forma temática. Nessa interface é possível visualizar o conteúdo de forma estática, mas para interagir é preciso abrir o arquivo diretamente no Google Colab.
- **Acesso pelo Colab:** Dentro da interface do Google Colab é possível abrir notebooks hospedados no GitHub diretamente, utilizando o link de acesso a página.
- **Identificação:** Para salvar suas alterações e interagir com os gráficos, certifique-se de estar logado em sua Conta Google. Isso garantirá que o ambiente tenha permissão para alocar memória e processamento para os seus cálculos.

Por que usar a Nuvem?

A escolha pelo Google Colab como infraestrutura do nosso laboratório baseia-se na equidade tecnológica. Não importa se você utiliza um computador de última geração ou um dispositivo básico, pois desde que haja acesso à internet, o tempo de processamento para simular os exemplos será o mesmo para todos os estudantes. Essa abordagem elimina barreiras de hardware e foca no que realmente importa, a sua evolução de aprendizagem.

B.2 Anatomia do Notebook

Ao abrir um laboratório no Google Colab, você encontrará um documento composto por blocos independentes chamados células. Entender a função de cada uma é o que permite a transição da leitura para a experimentação.

Os Dois Tipos de Células

- **Células de Texto (Markdown):** Contêm a base teórica, enunciados e orientações. Elas funcionam como as páginas do livro e não exigem interação técnica.
- **Células de Código (Python):** Possuem um fundo acinzentado e contêm os scripts responsáveis por gerar os gráficos, resolver equações e processar os simuladores.

Execução e Conexão

Uma célula de código só produz resultados após ser executada. Existem duas formas principais de realizar esse procedimento:

- **Botão Play:** Clique no ícone ► no canto superior esquerdo de cada célula de código.
- **Atalho de Teclado:** Utilize a combinação **Shift + Enter**. Este comando executa a célula atual e seleciona a próxima automaticamente, garantindo um fluxo contínuo de estudo.

No canto superior direito da interface, verifique o status de Conexão. Clique em Conectar para que o Google aloque os recursos de hardware necessários. Sem estar conectado, o ambiente permanece em modo de apenas leitura.

B.3 Dinâmica de Laboratório Virtual

A principal característica deste Laboratório Virtual é a interatividade por meio de Widgets, como barras de rolagem (sliders) e menus. Eles permitem manipular parâmetros matemáticos sem a necessidade de editar o código-fonte.

Investigação Paramétrica

Os controles deslizantes representam variáveis críticas, como o incremento h nas derivadas ou o número de divisões n nas somas de Riemann.

- **Alteração de Valores:** Ao arrastar o slider, o valor da variável é instantaneamente atualizado dentro da memória, sem ter que repetir a execução a rotina.
- **Resposta Visual:** O gráfico é processado em tempo real, permitindo observar fenômenos como a convergência de uma área ou a inclinação de uma reta tangente de forma dinâmica.

Resiliência do Ambiente

O Google Colab é um espaço seguro para experimentação. Caso uma alteração de parâmetros resulte em erro ou travamento da imagem, basta reexecutar a célula (▶) ou utilizar o menu superior em Ambiente de Execução > Reiniciar sessão para restaurar o estado original do simulador.

Salvamento e Backup

O Google Colab funciona em uma máquina virtual temporária. Para que suas anotações, resoluções de exercícios e modificações nos códigos sejam preservadas, é necessário integrá-las ao seu ecossistema pessoal de arquivos. Como o notebook original no GitHub é apenas para leitura, você deve criar sua própria instância de trabalho:

- **Cópia no Drive:** No menu superior, selecione **Arquivo > Salvar uma cópia no Drive**. Isso cria uma versão editável na sua conta, onde as alterações serão salvas automaticamente.
- **Download Local:** Caso deseje manter uma cópia física do seu progresso, utilize **Arquivo > Fazer download > Fazer download do .ipynb**. Este arquivo pode ser reaberto em qualquer ambiente que suporte Jupyter Notebooks.

Documentação do Aprendizado

O Laboratório Virtual deve ser encarado como um caderno de estudos dinâmico.

- **Inserção de Comentários:** Utilize o botão + Texto para adicionar suas próprias percepções e interpretações entre os blocos de código. Registrar o comportamento de um fenômeno matemático é fundamental para a fixação teórica.
- **Nomenclatura:** Renomeie seus arquivos de forma organizada para facilitar a localização no Google Drive durante períodos de revisão.

Se deseja acessar os arquivos ou contribuir com o projeto, acesse o repositório oficial no GitHub:



<https://github.com/professorpalhares/Matematica>

Sobre a obra

A obra *Funções de uma Variável: uma Abordagem Interativa com Python* propõe uma integração rigorosa entre os fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral e o uso de ferramentas computacionais modernas. Distanciando-se do modelo puramente expositivo, o livro apresenta a teoria matemática de forma analítica, complementada por modelagens, resoluções e visualizações dinâmicas por meio da linguagem Python. Este material foi concebido para fornecer uma transição sólida da teoria abstrata para a experimentação prática, preparando o leitor para as complexas demandas tecnológicas contemporâneas.

Sobre o autor

Eduardo Palhares Júnior possui formação interdisciplinar em Ciência e Tecnologia, Engenharia Aeroespacial e Matemática. Com vasta experiência na docência, atuando desde o ensino fundamental até a pós-graduação, construiu sua trajetória em renomadas instituições públicas e privadas, como USP, UFABC, IFAM, IFSP, UNIVESP, FATEC, USCS e UniDrummond. Dedicou-se ao ensino de matemática, engenharia e computação, desenvolvendo pesquisas em aprendizado de máquina, ciência de dados e inteligência artificial aplicada. É autor de diversas obras e materiais didáticos nas áreas de tecnologia, ciência de dados e matemática aplicada, e coordenada projetos de extensão voltados à computação, educação financeira e investimentos.

Público-Alvo

Obra recomendada para um público amplo dentro das ciências exatas, engenharias e tecnologias, o material busca atingir estudantes de graduação, autodidatas e profissionais do mercado de tecnologia. Além disso, apresenta-se como um recurso complementar para docentes que buscam modernizar suas disciplinas, oferecendo uma metodologia inovadora que une a teoria matemática abstrata à prática da programação.



<https://professorpalhares.com.br>

