

Discretização e seu efeito na classificação: um estudo comparativo de intervalos não-usuais de discretização para caracterização de variáveis econômicas

Luiz E. S. de Araújo¹, Eduardo Palhares Júnior¹

¹Instituto Federal do Amazonas – Campus Zona Leste (IFAM)
69.086-475 – Manaus – AM – Brazil

14eduard@gmail.com, eduardo.palharesjr@ifam.edu.br.br

Abstract. *This paper suggests the analysis of the Brazilian economic cycle through the comparative study of several machine learning techniques. In addition to the macroeconomic indicators and techniques chosen, success in classification depends on the correct modeling of the phases of the economic cycle. Unusual intervals were evaluated for discretization of the classes, seeking to minimize the effects of outliers in the data and overtfitting.*

Resumo. *Este trabalho sugere a análise do ciclo econômico brasileiro através do estudo comparativo de diversas técnicas de aprendizado de máquina. Além dos indicadores macroeconômicos e técnicas escolhidas, o sucesso na classificação depende da correta modelagem das fases do ciclo econômico. Foram avaliados intervalos não usuais para discretização das classes, buscando minimizar os efeitos de outliers nos dados e overtfitting.*

1. Introdução

A compreensão da dinâmica futura dos ciclos econômicos baseado na correlação entre variáveis macroeconômicas tem como fundamentos duas abordagens complementares, uma mais empírica que busca a modelagem ideal através da implementação de diferentes métodos e outra corrente mais teórica busca caracterizar os pontos de inflexão do ciclo através de teorias financeiras baseadas no comportamento do nível, curvatura e inclinação da taxa de juros. Nesse contexto, sistemas especialistas têm sido empregados na economia em geral para auxiliar a caracterização de ciclos econômicos bem como na tomada de decisão no mercado de ações, valores mobiliários e commodities. Temos uma corrente que se baseia de forma majoritária nas relações teóricas que caracterizam o mercado (Vasicek 1977; Cox, Ingersoll, e Ross 1985; Estrella e Hardouvelis 1991; Svensson 1994; Estrella e Mishkin 1997; 1998). Por outro lado, temos uma abordagem mais empírica que se concentra nas relações entre os dados (Chang et al. 2009; Kamo e Dagli 2009; Guresen, Kayakutlu, e Daim 2011; 2011; Svalina et al. 2013; Araújo, Oliveira, e Meira 2015; Cervelló-Royo, Guijarro, e Michniuk 2015).

A classificação de variáveis econômicas tem sido amplamente empregada como ferramenta para prever eventos relevantes nos estudos de economia. Um exemplo clássico é o trabalho de (Burns e Mitchell 1946), que analisaram períodos de desaceleração e recessão econômica. Com o tempo, diversos indicadores econômicos foram propostos e avaliados, como discutido por (Estrella e Mishkin 1995), que destacaram a importância dessas variáveis na identificação de pontos de inflexão no crescimento econômico.

Estudos mais recentes, como os de (Kauppi e Saikkonen 2008) e (Rudebusch e Williams 2009), reforçam essa abordagem, enfatizando sua relevância na análise de tendências econômicas.

Este trabalho propõe o desenvolvimento de modelos baseados em aprendizado de máquina para analisar diversos indicadores econômicos, com o objetivo de identificar possíveis pontos de inversão no crescimento econômico, como o início de uma fase de recessão em diferentes horizontes temporais. Embora uma abordagem semelhante tenha sido discutida em (Palhares Junior et al. 2024), o estudo anterior pode ter sofrido forte influência dos outliers decorrentes da pandemia de Covid-19, o que explicaria um eventual viés nos resultados. Neste trabalho, são propostos novos intervalos de discretização que buscam ampliar o conhecimento sobre o modelo, além de considerar um intervalo temporal maior para tentar diluir os outliers no conjunto de treinamento.

2. Metodologia

O objetivo geral dessa metodologia é a caracterização do comportamento do ciclo econômico do Brasil, através de um modelo baseado em técnicas estatísticas e de aprendizado de máquina, que busca descrever o PIB em função de outras variáveis macroeconômicas.

2.1. Análise e pré-processamento dos dados

Os dados utilizados nesse trabalho foram disponibilizados pelo Banco Central do Brasil através de uma API. A arquitetura de projeto proposta em (Palhares Junior et al. 2024) mostrou-se adequada para o problema abordado, conforme apresentada na Figura 1:

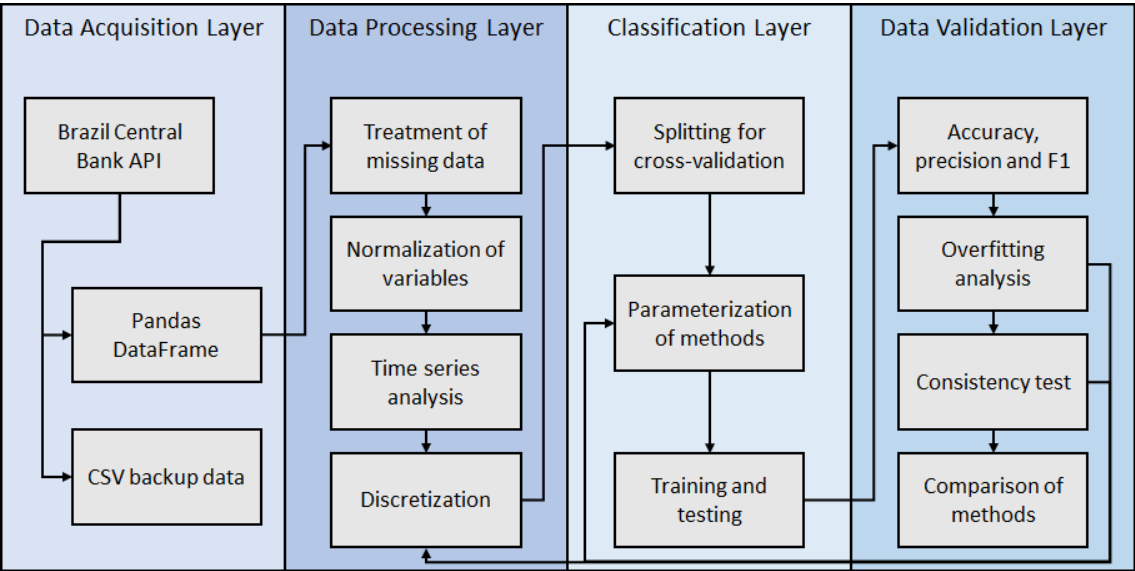


Figura 1: Pipeline de dados

As variáveis macroeconômicas utilizadas tratam de aspectos diferentes, possuindo assim diferentes unidades de medida. Para que fossem comparáveis, foram aplicadas transformações nas variáveis originais, de forma que esse trabalho considera a variação mensal em relação as observações das séries originais, compreendem o período entre janeiro de 2002 e maio de 2024.

- **PIB:** Produto Interno Bruto mensal

- **IPA:** Índice de preços ao produtor amplo
- **IPEM:** Indicador da produção - extrativo mineral
- **IPIT:** Indicador da produção - indústria de transformação
- **IPBC:** Indicador da produção - bens de capital
- **IPBCD:** Indicador da produção - bens de consumo duráveis
- **IVVV:** Índice volume de vendas no varejo - Automóveis, motocicletas, partes e peças - Brasil
- **VVCL:** Vendas de veículos pelas concessionárias - Comerciais leves
- **VVCC:** Vendas de veículos pelas concessionárias - Caminhões
- **IEF:** Índice de Expectativas Futuras
- **ICC:** Índice de Confiança do Consumidor
- **Spub:** Saldos das operações de credito das instituições financeiras sob controle publico
- **Spriv:** Saldos das operações de credito das instituições financeiras sob controle privado
- **M1:** Meios de pagamento - M1 (media dos dias uteis do mês)
- **M2:** Meios de pagamento - M2 (media dos dias uteis do mês)

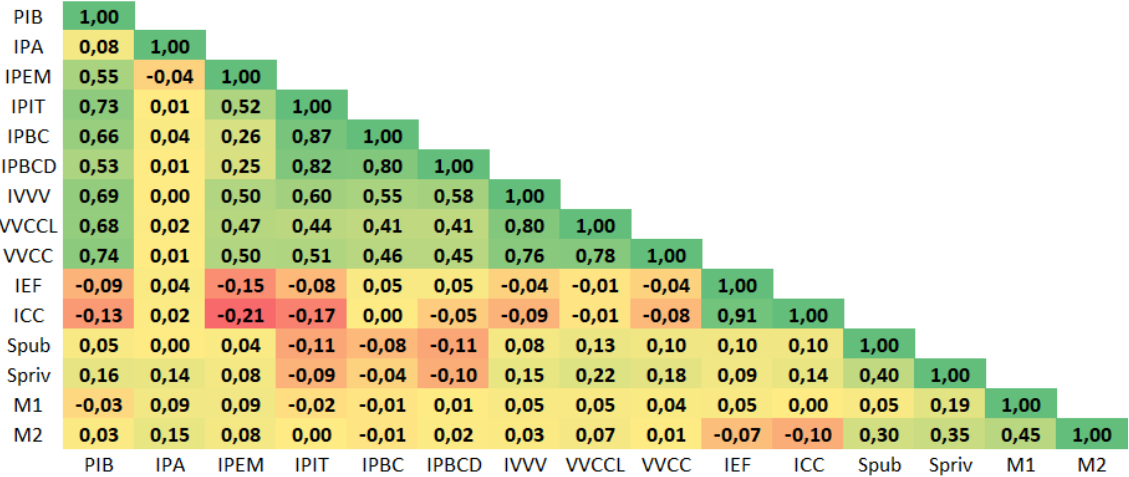


Figura 2: Matriz de correlação entre as variáveis explicativas

Conforme discutido em (Palhares Junior et al. 2024), um conjunto mais restrito de variáveis explicativas poderia trazer uma melhora na performance preditiva através da redução do viés e/ou sobreajuste da etapa de treinamento. Buscando investigar isso, a partir do coeficiente de correlação apresentado na Figura 2, foi proposta um cenário alternativo para análise que considera um conjunto mais restrito de variáveis, conforme Figura 3:

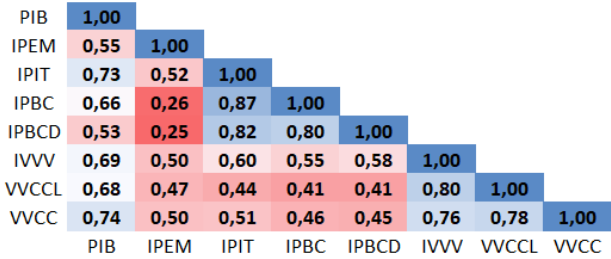


Figura 3: Matriz de correlação do conjunto restrito de variáveis explicativas

2.2. Modelagem das categorias

Conforme discutido por (Palhares Junior et al. 2024), a discretização das variáveis é uma etapa crucial para sucesso na qualidade da previsão, portanto, esse trabalho tem como foco analisar o efeito de intervalos não usuais para definição das categorias na acurácia e precisão dos métodos propostos.

Apesar da distribuição com 5 classes modificadas representar uma melhora significativa em relação ao modelo que considera a distância intervalar padrão, ela ainda não foi capaz de superar o desempenho do modelo baseado em apenas 3 classes com distribuição padrão. Portanto, é sugerida a mesma modificação para o intervalo do modelo com 3 classes, considerando uma distância em torno da média de $|0,6745|$ desvio padrão, reduzindo de 66% para 50% os dados da classe central.

$$\begin{cases} x \mapsto -1, & \text{se } \Delta x \leq \mu_x - 0,6745 \cdot \sigma_x; \\ x \mapsto 0, & \text{se } \mu_x - 0,6745 \cdot \sigma_x < \Delta x \leq \mu_x + 0,6745 \cdot \sigma_x; \\ x \mapsto 1, & \text{se } \Delta x \geq \mu_x + 0,6745 \cdot \sigma_x; \end{cases}$$

Apesar do modelo anterior categorizar movimentos de alta e de baixa, ele pode ser limitado para separar cenários de baixo e alto risco, portanto, o modelo que considera 5 classes é desejado para separar movimentos fortes dos mais moderados.

$$\begin{cases} x \mapsto -2, & \text{se } \Delta x \leq \mu_x - 2 \cdot \sigma_x; \\ x \mapsto -1, & \text{se } \mu_x - 2 \cdot \sigma_x < \Delta x \leq \mu_x - 0,6745 \cdot \sigma_x; \\ x \mapsto 0, & \text{se } \mu_x - 0,6745 \cdot \sigma_x < \Delta x < \mu_x + 0,6745 \cdot \sigma_x; \\ x \mapsto 1, & \text{se } \mu_x + 0,6745 \cdot \sigma_x \leq \Delta x < \mu_x + 2 \cdot \sigma_x; \\ x \mapsto 2, & \text{se } \Delta x \geq \mu_x + 2 \cdot \sigma_x; \end{cases}$$

A seguinte distribuição repete a ideia anterior de reduzir a classe de estagnação para 50% dos dados na classe central, aumentando um pouco o intervalo que considera os intervalos de alta e queda moderados, mas mantém as classes extremas numa distancia intervalar segura, conforme Figura 4:

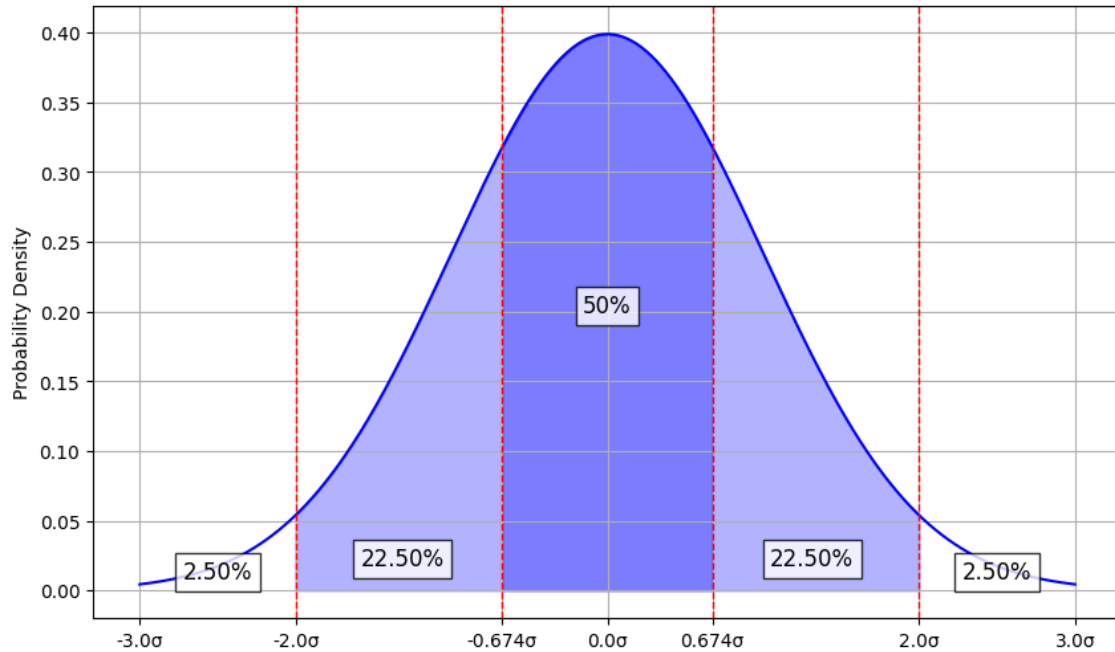


Figura 4: Distribuição de dados em 5 categorias híbrida com distribuição 50-95

Um problema bastante discutido na literatura decorre de possíveis problemas de viés e convergência associados a dificuldade de se identificar classes muito raras ou desbalanceadas. Como foi observado que as classes centrais apresentam, de modo geral, excelente performance em todos os métodos de previsão, é proposta uma modificação focada na inclusão de dados e flexibilização das classes extremas.

$$\begin{cases} x \mapsto -2, & \text{se } \Delta x \leq \mu_x - 1.6475 \cdot \sigma_x; \\ x \mapsto -1, & \text{se } \mu_x - 1.6475 \cdot \sigma_x < \Delta x \leq \mu_x - \sigma_x; \\ x \mapsto 0, & \text{se } \mu_x - \sigma_x < \Delta x < \mu_x + \sigma_x; \\ x \mapsto 1, & \text{se } \mu_x + \sigma_x \leq \Delta x < \mu_x + 1.6475 \cdot \sigma_x; \\ x \mapsto 2, & \text{se } \Delta x \geq \mu_x + 1.6475 \cdot \sigma_x; \end{cases}$$

Nessa distribuição intervalar foi mantido a distancia de 1 desvio padrão em relação à média para a classe central, mas reduziu-se o intervalo para os movimentos moderados, buscando que as classes extremas possuam pelo menos 5% dos dados cada uma, conforme Figura 5.

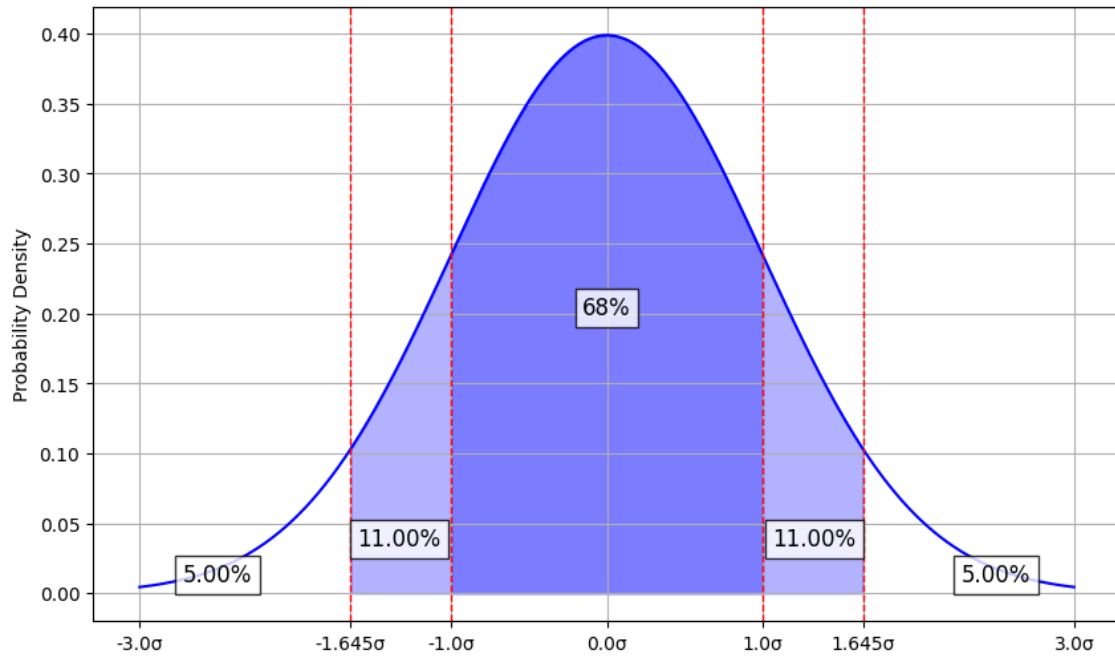


Figura 5: Distribuição de dados em 5 categorias híbrida com distribuição 68-90

2.3. Previsão e validação

Uma etapa fundamental em projetos de predição de dados temporais é utilizar validação cruzada específica para séries temporais para evitar overfitting e viés ao treinar os modelos, preservando a ordem cronológica dos dados. O método Time Series Split Cross Validation foi adotado, iniciando com pequenos subconjuntos de treinamento/teste no início da série e expandindo iterativamente, onde o conjunto de teste anterior torna-se parte do treinamento seguinte. Após testar diferentes proporções para os subconjuntos iniciais, optou-se pela configuração de 30% dos dados para teste e validação.

Diversas técnicas estatísticas e de mineração de dados, disponíveis na biblioteca Scikit-Learn do Python, foram aplicadas com configurações padrão, já que a otimização detalhada dos modelos não era o foco deste trabalho. Entretanto, para mitigar problemas

de convergência, alguns hiperparâmetros foram ajustados manualmente. Os métodos utilizados na etapa de classificação foram:

- KNN: k-nearest neighbors
- NB: Gaussian Naive Bayes
- DT: decision tree
- RF: random forest
- LR: logistic regression
- SVC: support vector classification
- NN: neural network

Para medir e comparar a qualidade das previsões, foram adotadas duas métricas principais. A acurácia mede a proporção de previsões corretas em relação ao total de amostras, sendo uma métrica geral de desempenho. Já o score F1 é a média harmônica entre precisão e recall, favorecendo o equilíbrio entre os dois, especialmente em casos de classes desbalanceadas.

3. Resultados e discussões

Para comparar os diferentes cenários, foi realizada uma análise dos métodos quanto à precisão obtida nas etapas de treinamento e teste, complementada por uma avaliação detalhada do comportamento do score F1 em função das discretizações e do conjunto de variáveis explicativas adotadas em cada caso.

3.1 Acurácia

A análise da acurácia nos diversos cenários propostos foi avaliada tanto na etapa de treinamento quanto de teste. Conforme discutido em (Palhares Junior et al. 2024), o ganho médio de acurácia na etapa de teste era de aproximadamente 10% com quase nenhuma variabilidade. Nos cenários avaliados nesse trabalho, também se observou melhora na etapa de testes, mas com um ganho médio entre 15% e 20% e maior variabilidade, com técnicas como florestas aleatórias e redes neurais alcançando ganhos da ordem de 30%, provavelmente por uma maior robustez no tratamento das não linearidades. Vamos concentrar a discussão apenas na etapa de teste.

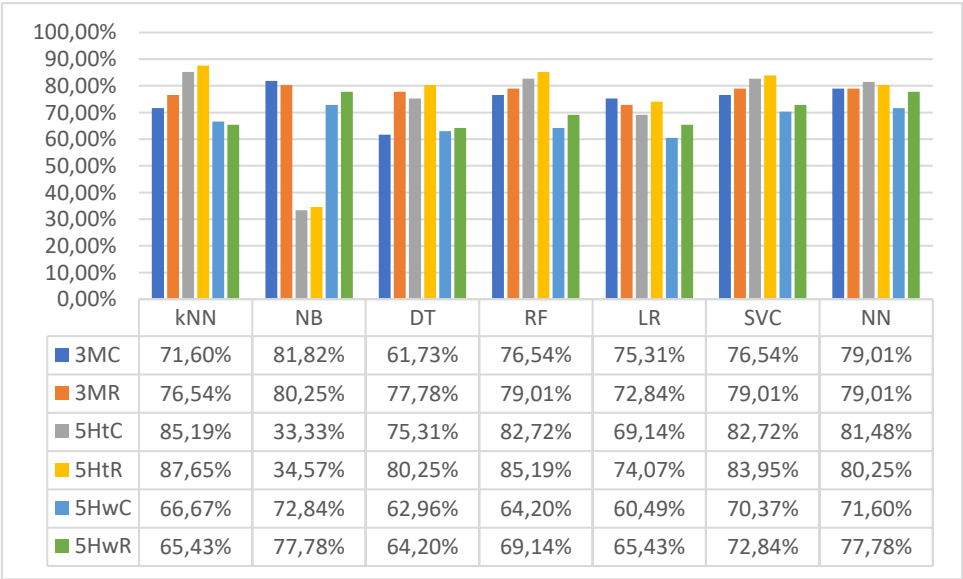


Figura 6: Acurácia na etapa de teste para diversos cenários

Com relação a nomenclatura utilizada nos diferentes cenários, temos as modificações dos intervalos simples com 3 classes e híbridas em 5 classes em relação ao

trabalho original, onde os intervalos laterais ficam mais finos (tiny) conforme Figura 5 ou largos (wide) conforme Figura 4:

- 3MC – 3 classes modificada (distribuição 50%) com a base completa
- 3MR – 3 classes modificada (distribuição 50%) com a base restrita
- 5HtC – 5 classes híbrida (tiny - distribuição 50-95) com a base completa
- 5HtR – 5 classes híbrida (tiny - distribuição 50-95) com a base restrita
- 5HwC – 5 classes híbrida (wide - distribuição 68-90) com a base completa
- 5HwR – 5 classes híbrida (wide - distribuição 68-90) com a base restrita

Com relação ao observado em (Palhares Junior et al. 2024), cenário com 3 classes mostrou desempenho equivalente, mas considerando o maior intervalos temporal dos dados e o fato de que os outliers gerados pela pandemia agora pertencem também a etapa de treinamento, um desempenho comparável não pode ser considerado vantajoso. Com relação aos cenários que consideram 4 classes, a distribuição 50-95 demonstrou melhor desempenho em relação que a 68-90, ambos superando bastante os resultados encontrados em trabalhos anteriores. Além disso, há uma melhora marginal quando se restringe a base de dados, mas que não pode ser considerada significativa.

3.2 Score-F1

Com relação ao Score-F1, devido a grande quantidade de cenários avaliados, será feita uma discussão baseada no ganho de performance quando se restringe as variáveis explicativas, para cada discretização proposta.

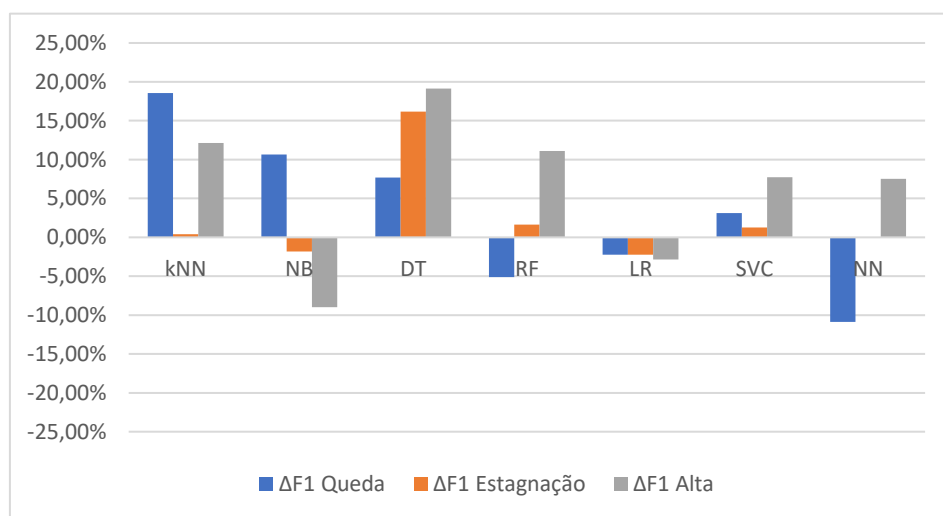


Figura 7: Variação do Score-F1 no cenário com 3 classes

No cenário de 3 classes apresentado na Figura 7, vemos um ganho mais expressivo em diversos cenários, bem superior ao que foi apresentado em (Palhares Junior et al. 2024), onde o ganho era marginal e em alguns casos até havia perda. Apesar da distribuição em 3 classes com intervalo padrão não ser apresentado nesse trabalho, resultados preliminares mostram um ganho médio maior do que o apresentado na Figura 7 para técnicas mais simples, o que denota que a modificação no intervalo tornou o modelo menos resiliente a restrição de variáveis.

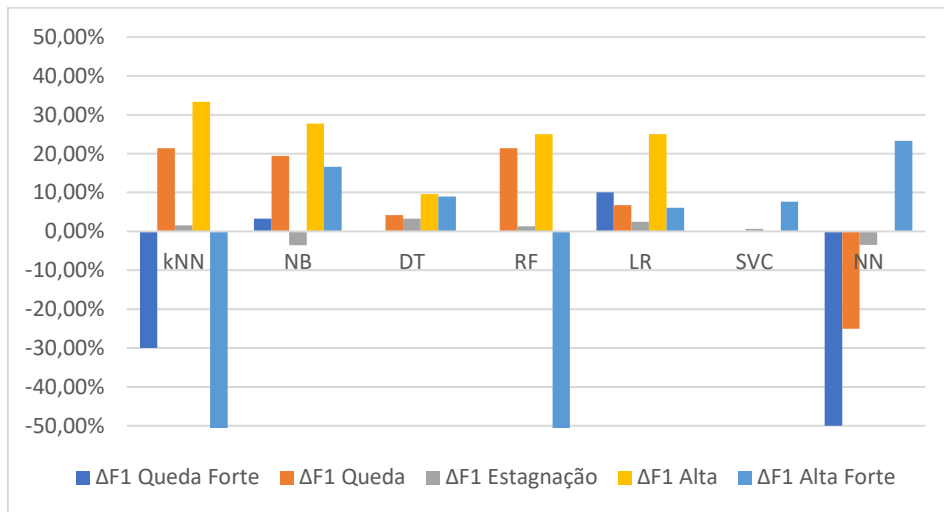


Figura 8: Variação do Score-F1 no cenário com 5 classes híbrida 68-90

Analisando o cenário com 5 classes híbrida e distribuição 68-90 apresentado na Figura 8, observamos que a restrição de variáveis explicativas trouxe uma melhora para as classes centrais e uma piora nas classes extremas. Conforme observado em (Palhares Junior et al. 2024) e reforçado pelos resultados do cenário com 3 classes, apesar dos intervalos aumentar a disponibilidade de dados nas classes extremas ainda há de viés de treinamento, o qual pode ser mitigado considerando um conjunto maior de variáveis explicativas. Por outro lado, nas classes centrais o excesso de variáveis explicativas acaba gerando sobre-ajuste, especialmente nos métodos mais simples os quais tem dificuldade de tratar as não-linearidades do modelo. Fazendo um balanço entre viés o sobre-ajuste, recomenda-se utilizar a base completa sem restringir as variáveis explicativas.

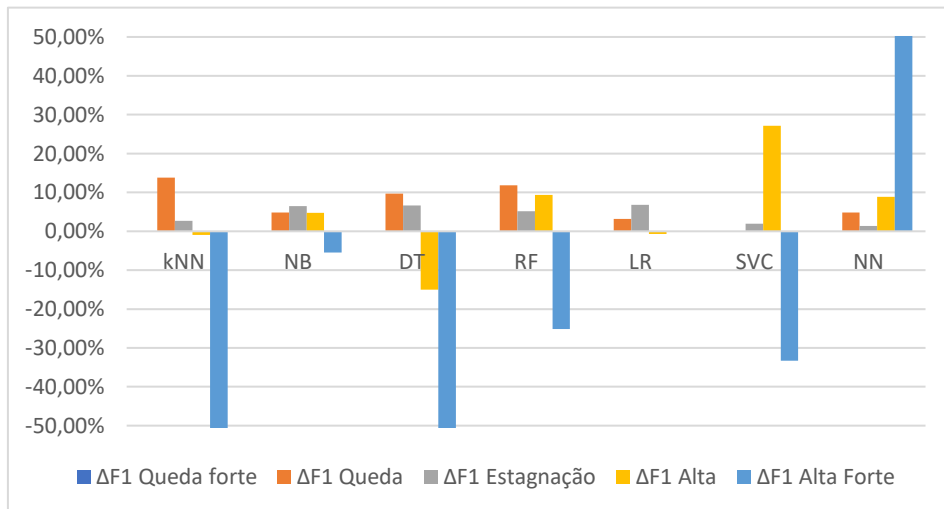


Figura 9: Variação do Score-F1 no cenário com 5 classes híbrida 50-95

Considerando agora o cenário com 5 classes híbrida e distribuição 50-95 apresentado na Figura 9, ao restringir o conjunto de variáveis explicativas, observamos uma melhora marginal nas classes centrais e uma piora significativa nas classes extremas. Por motivos complementares ao cenário anterior, o maior intervalo de dados nas classes laterais minimiza o problema de sobre-ajuste, de maneira que a restrição de variáveis se torna menos significativa. Por outro lado, o intervalo extremamente estreito nas classes

extremais torna praticamente inviável prever as classes laterais, especialmente os movimentos de queda forte.

Tabela 1: Ganho de Score-F1 quando se restringe as variáveis explicativas

Categorias	3 modificada		5 híbrida 68/90		5 híbrida 50/95	
	absolute	relative	absolute	relative	absolute	relative
-2			-66,68%	-9,53%	0,00%	0,00%
-1	21,82%	3,12%	48,20%	6,89%	48,22%	6,89%
0	15,42%	2,20%	2,21%	0,32%	31,15%	4,45%
1	45,87%	6,55%	120,73%	17,25%	33,44%	4,78%
2			-108,70%	-15,53%	-100,31%	-14,33%
Total	83,12%	11,87%	-4,24%	-0,61%	12,50%	1,79%

Buscando comparar o ganho absoluto alcançado em cada cenário quando se restringe as variáveis explicativas, a Tabela 1 mostra que para o modelo de 3 classes há um ganho significativo na restrição das variáveis, enquanto que em ambos os modelos com 5 classes essa restrição tirou informação importante para o modelo conseguir treinar de maneira satisfatória as classes extremais.

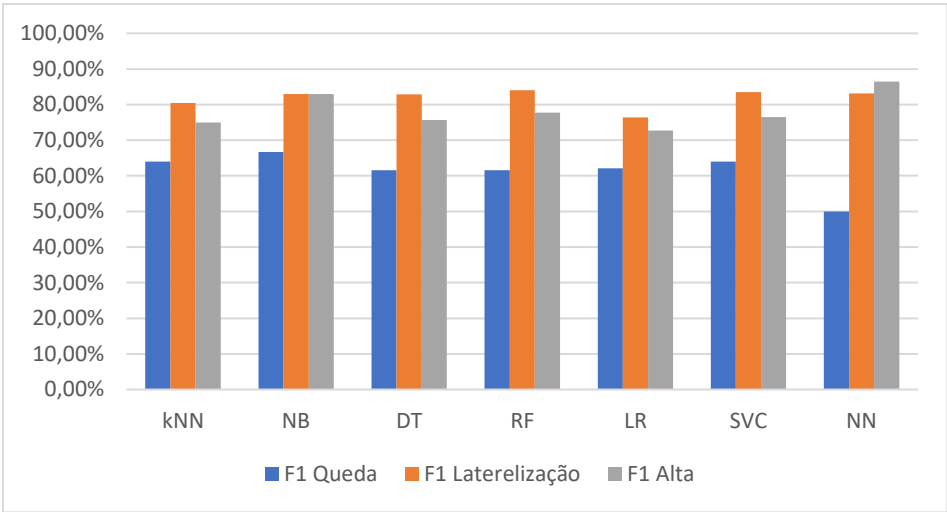


Figura 10: Resultados do Score-F1 da projeção do PIB brasileiro no cenários que considera 3 categorias e conjunto de variáveis explicativas restrita

Assim como foi observado em (Palhares Junior et al. 2024), o modelo com 3 classes faz um balanço adequado de desempenho entre as classes, apesar de uma maior dificuldade em prever os movimentos de queda. É provável que o efeito de outlier decorrendo do período da pandemia de COVID-19 influencia de forma significativa a capacidade preditiva dos modelos. Os modelos que consideram 5 classes híbridas apresentaram muita dificuldade em prever as classes extremais mesmo quando seu intervalo foi alongado (distribuição 68-90), de maneira que não podem ser consideradas abordagens adequadas.

4. Conclusão

Este trabalho tem como objetivo estabelecer uma metodologia eficiente para prever a tendência do PIB do Brasil, através do uso de técnicas de aprendizagem de máquinas aplicadas a indicadores macroeconômicos. Como trata-se de uma abordagem baseada em

classificação, o objetivo principal foi investigar intervalos não-usuais na categorização das variáveis, buscando contornar problemas de viés e sobre-ajuste e melhorar a performance preditiva dos métodos empregados.

As técnicas de classificação preditiva propostas tiveram desempenho semelhante quando fixado um cenário, com algumas tendo problemas mais graves devido ao desbalanceamento das classes extremas. Redes neurais e Support Vector Classification não foram capazes de identificar classes extremas quando o intervalo mais restrito (apenas 2,5% para cada classe) foi empregado, enquanto que quando se restringiu as classes laterais (11% para cada classe) essas técnicas também não conseguiram identificá-las. Métodos mais interpretáveis como k-vizinhos próximos e árvores de decisão conseguiram identificar, mas apresentaram baixa performance.

A acurácia do modelo híbrido com 5 categorias e distribuição 68-90 obteve uma ligeira vantagem sobre as demais abordagens. Em relação ao Score-F1, a abordagem utilizando apenas 3 categorias consegue um desempenho superior e mais equilibrado. Ainda assim, resultados preliminares que utilizam intervalos mais comuns superam os resultados encontrados nesse trabalho, reforçando a ideia que os intervalos propostos não são suficientes para aumentar a qualidade preditiva das técnicas propostas. A restrição das variáveis explicativas também não se mostrou vantajosa, provavelmente porque as não linearidades do modelo exige um conjunto de informações maior especialmente no tratamento das categorias que possuem baixa disponibilidade de dados.

Trabalhos futuros podem explorar diferentes abordagens nas etapas de preparação dos dados, como a categorização com intervalos não simétricos ou o tratamento das componentes sazonais das séries utilizadas. Além disso, é possível buscar uma otimização dos métodos através da análise intensiva dos hiper parâmetros, bem como o emprego de outras técnicas e modelos econométricos.

References

- Araújo, Ricardo De A., Adriano L.I. Oliveira, e Silvio Meira. 2015. “A Hybrid Model for High-Frequency Stock Market Forecasting”. *Expert Systems with Applications* 42 (8): 4081–96. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2015.01.004>.
- Burns, Arthur F., e Wesley C. Mitchell. 1946. *Measuring Business Cycles*. National Bureau of Economic Research.
- Cervelló-Royo, Roberto, Francisco Guijarro, e Karolina Michniuk. 2015. “Stock Market Trading Rule Based on Pattern Recognition and Technical Analysis: Forecasting the DJIA Index with Intraday Data”. *Expert Systems with Applications* 42 (14): 5963–75. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2015.03.017>.
- Chang, Pei-Chann, Chen-Hao Liu, Jun-Lin Lin, Chin-Yuan Fan, e Celeste S.P. Ng. 2009. “A Neural Network with a Case Based Dynamic Window for Stock Trading Prediction”. *Expert Systems with Applications* 36 (3): 6889–98. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2008.08.077>.
- Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, e Stephen A. Ross. 1985. “A Theory of the Term Structure of Interest Rates”. *Econometrica* 53 (2): 385. <https://doi.org/10.2307/1911242>.

- Estrella, Arturo, e Gikas A. Hardouvelis. 1991. "The Term Structure as a Predictor of Real Economic Activity". *The Journal of Finance* 46 (2): 555–76. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1991.tb02674.x>.
- Estrella, Arturo, e Frederic Mishkin. 1995. "Predicting U.S. Recessions: Financial Variables as Leading Indicators". w5379. Cambridge, MA: National Bureau of Economic Research. <https://doi.org/10.3386/w5379>.
- Estrella, Arturo, e Frederic S. Mishkin. 1997. "The Predictive Power of the Term Structure of Interest Rates in Europe and the United States: Implications for the European Central Bank". *European Economic Review* 41 (7): 1375–1401. [https://doi.org/10.1016/S0014-2921\(96\)00050-5](https://doi.org/10.1016/S0014-2921(96)00050-5).
- Estrella, Arturo, e Frederic S. Mishkin. 1998. "Predicting U.S. Recessions: Financial Variables as Leading Indicators". *Review of Economics and Statistics* 80 (1): 45–61. <https://doi.org/10.1162/003465398557320>.
- Guresen, Erkam, Gulgun Kayakutlu, e Tugrul U. Daim. 2011. "Using Artificial Neural Network Models in Stock Market Index Prediction". *Expert Systems with Applications* 38 (8): 10389–97. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.02.068>.
- Kamo, Takenori, e Cihan Dagli. 2009. "Hybrid Approach to the Japanese Candlestick Method for Financial Forecasting". *Expert Systems with Applications* 36 (3): 5023–30. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2008.06.050>.
- Kauppi, Heikki, e Pentti Saikkonen. 2008. "Predicting U.S. Recessions with Dynamic Binary Response Models". *Review of Economics and Statistics* 90 (4): 777–91. <https://doi.org/10.1162/rest.90.4.777>.
- Palhares Junior, Eduardo, Antonio M. T. Araujo, Adriano H. Souza, Noam G. Silva, e Wenndisson S. Souza. 2024. "Ensemble of Machine Learning Applied to Economic Cycles Analysis: A Comparative Study Using Antecedent Macroeconomic Indicators for Brazilian GDP Prediction Classification". *Revista Brasileira de Planejamento e Desenvolvimento*. Submitted for publication.
- Rudebusch, Glenn D., e John C. Williams. 2009. "Forecasting Recessions: The Puzzle of the Enduring Power of the Yield Curve". *Journal of Business & Economic Statistics* 27 (4): 492–503. <https://doi.org/10.1198/jbes.2009.07213>.
- Svalina, Ilija, Vjekoslav Galzina, Roberto Lujić, e Goran Šimunović. 2013. "An Adaptive Network-Based Fuzzy Inference System (ANFIS) for the Forecasting: The Case of Close Price Indices". *Expert Systems with Applications* 40 (15): 6055–63. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2013.05.029>.
- Svensson, Lars E. O. 1994. "Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994". *IMF Working Papers* 94 (114): 1. <https://doi.org/10.5089/9781451853759.001>.
- Vasicek, Oldrich. 1977. "An Equilibrium Characterization of the Term Structure". *Journal of Financial Economics* 5 (2): 177–88. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(77\)90016-2](https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90016-2).