Geometria analítica

Eduardo Palhares Júnior

17 de junho de 2019

1 Equação da reta

1.1 Equação Geral

Teorema "A toda reta r no plano cartesiano está associada ao menos uma equação da frma $ax + by + c = 0$ em que a,b,c são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e (x, y) representa um ponto genérico r.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underbrace{(y_1 - y_2)}_{a} x + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{b} y + \underbrace{(x_1 y_2 - x_2 y_1)}_{c} = 0$$
$$\therefore$$
$$ax + by + c = 0$$

1.2 Intersecção de duas retas

Todo ponto de intersecção de duas retas tem que satisfazer as equações de ambas as retas. Portanto, obtemos o ponto comum $P(x_0, y_0)$ a duas retas concorrentes resolvendo o sistema formado pelas suas equações:

$$\begin{cases} r : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ s : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

1.3 Posição relativa entre 2 retas

$$\begin{cases} r : a_1x + b_1y = c_1 \\ s : a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} r \times s & \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} & \text{concorrentes} \\ r \cap s = \varnothing & \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2} & \text{paralelas} \\ r = s & \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} & \text{coincidentes} \end{array}$$

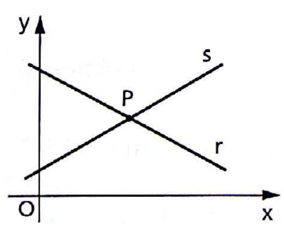


Figura 1: Concorrentes

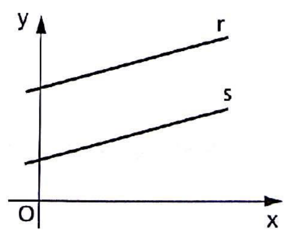


Figura 2: Paralelas

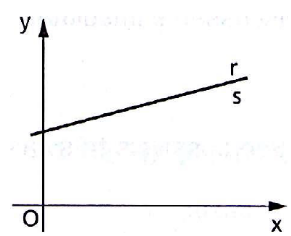


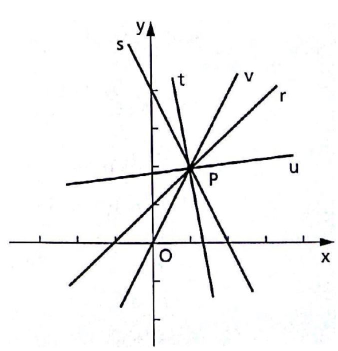
Figura 3: Coincidentes

1.4 Feixe de retas concorrentes

Feixe de retas concorrentes é um conjunto de retas coplanares, concorrentes em um único ponto $P(x_0, y_0)$. Ele fica definido por seu centro $P(x_0, y_0)$ ou por duas de suas retas.

$$k_1(a_1x + b_1y + c_1) + k_2(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \tag{1}$$

onde a equação 1 representa o feixe e os parâmetros k_1 e k_2 movimentam o feixe.

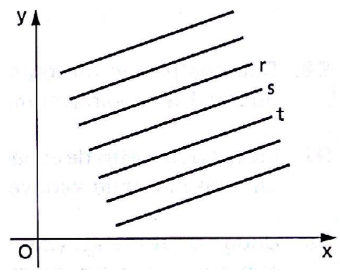


1.5 Feixe de retas paralelas

Feixe de retas concorrentes é um conjunto de retas coplanares, todas paralelas a uma reta dada (paralelas entre sí). Ele fica definido quando conhecemos uma de suas retas (ou sua direção).

$$ax + by + c' = 0 \tag{2}$$

onde a equação 2 representa o feixe e o parâmetro c movimenta o feixe.



1.6 Formas da equação da reta

Forma geral

$$ax + by + c = 0$$

Forma reduzida

$$y = mx + q$$

Forma simétrica

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Forma paramétrica

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

Exemplo

Forma paramétrica

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 4t + 5 \end{cases}$$

Forma geral

$$\begin{cases} t = \dfrac{x-1}{3} \\ t = \dfrac{y-5}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{4} \Rightarrow 4x - 3y + 11 = 0$$

Forma reduzida

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$$

Forma simétrica

$$4x - 3y + 11 = 0$$

$$4x - 3y = -11$$

$$-\frac{4}{11}x + \frac{3}{11}y = 1$$

$$\frac{x - 0}{-\frac{11}{4}} + \frac{y - 0}{\frac{11}{3}} = 1$$

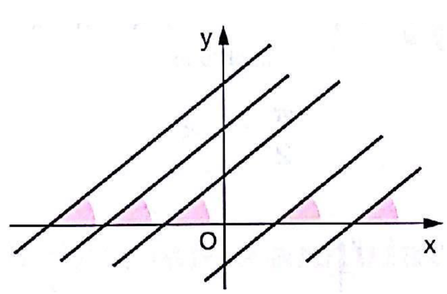
2 Teoria angular

2.1 Coeficiente angular

$$m = \tan \alpha$$

Propriedades

1. se $\hat{r}$ é agudo, então $m > 0$
2. se $\hat{r}$ é obtuso, então $m < 0$
3. se $\hat{r}$ é nulo, então $m = 0$
4. se $\hat{r}$ é reto, então não se define m.
5. fornecer a inclinação da reta é equivalente a fornecer a direção da reta. Dado um feixe de retas paralelas, todas tem a mesma inclinação (direção).



2.2 Calculo de m

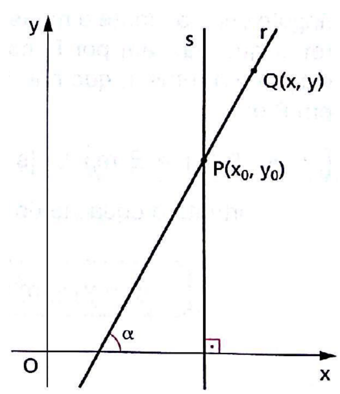
Só é possível calcular o coeficiente angular de uma reta quanto conhecemos pelo menos uma das seguintes informações:

1. Dois pontos distintos
2. A equação geral
3. A direção

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

onde $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \Delta x \neq 0$.

2.3 Equação da reta passando por $P(x_0, y_0)$



$$\begin{cases} r: & y - y_0 = m\,(x - x_0) \\ s: & x = x_0 \end{cases}$$

2.4 Condição de paralelismo

Teorema

$$r // s \Leftrightarrow m_r = m_s$$

Demonstração

$$r // s \Leftrightarrow \alpha_r = \alpha_s \Leftrightarrow \tan \alpha_r = \tan \alpha_s \Leftrightarrow m_r = m_s$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

2.5 Condição de perpendicularismo

Teorema

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r m_s = -1$$

Demonstração (IDA)

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \alpha_1 + \frac{\pi}{2} \\
\tan\alpha_2 &= \tan\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) \\
\tan\alpha_2 &= \cot(-\alpha_1) \\
\tan\alpha_2 &= -\frac{1}{\tan\alpha_1} \\
\tan\alpha_2 \tan\alpha_1 &= -1 \\
&\therefore \\
m_r m_s &= -1
\end{aligned}$$

Demonstração (VOLTA)

$$m_r m_s = -1 \Rightarrow m_r = -\frac{1}{m_s} \Rightarrow \alpha_1 = \theta + \alpha_2 \tag{3}$$

ou seja, as retas r e s são concorrentes.

$$\begin{aligned}
m_r &= -\frac{1}{m_s} \\
\tan\alpha_1 &= -\frac{1}{\tan\alpha_2} \\
\tan\alpha_1 &= -\cot\alpha_2 \\
\tan\alpha_1 &= \tan\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) \\
&\therefore \\
\alpha_2 &= \alpha_1 + \frac{\pi}{2} \qquad (4)
\end{aligned}$$

Comparando a equação 3 com a equação 4, temos que $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r \perp s$.

2.6 Ângulo entre 2 retas

Caso 1: uma das retas é vertical

$$\tan\theta_1 = \left|\frac{1}{m_r}\right|$$

Resumo Dadas r e s, se uma delas não tem coeficiente angular, a tangente do ângulo agudo $\hat{rs}$ é o módulo do inverso do coeficiente angular da outra.

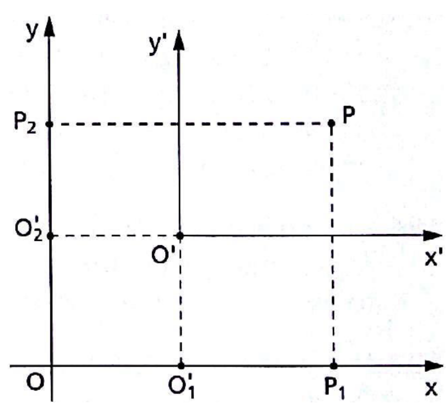
Caso 2: nenhuma das retas é vertical

$$\tan\theta_1 = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}\right|$$

Resumo Dadas r e s, se uma delas tem coeficiente angular, a tangente do ângulo agudo $\hat{rs}$ é o módulo da diferença dos coeficientes angulares dividida por 1 somado ao produto dos coeficientes angulares.

3 Distancia de ponto e reta

3.1 Translação do sistema



$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$$

3.2 Distância entre ponto e reta

$$\begin{cases} r: & ax + by + c' = 0 \\ s: & bx - ay = 0 \end{cases}$$

Fazendo $r^2 + s^2$, temos

$$
\begin{aligned}
(ax+by)^2+(bx-ay)^2 &= c'^2 \\
a^2x^2+2abxy+b^2y^2+b^2x^2-2abxy+a^2y^2 &= c'^2 \\
a^2\left(x^2+y^2\right)+b^2\left(x^2+y^2\right) &= c'^2 \\
\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right) &= c'^2 \\
\underbrace{\left(x^2+y^2\right)}_{d^2} &= \frac{c'^2}{a^2+b^2} \\
&\therefore \\
d_{O,r} &= \left|\frac{c'^2}{a^2+b^2}\right|
\end{aligned}
$$

Escolhendo um ponto genérico P fora da origem, temos

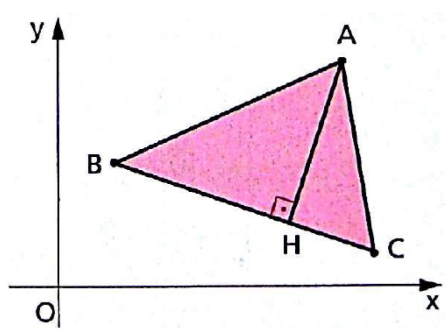
$$d_{P,r} = \left|\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\right|$$

Finalmente, a distancia entre 2 retas é dada por

$$d_{r,s} = \left|\frac{c-c'}{a^2+b^2}\right|$$

3.3 Área do trinângulo

Seja $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$ e $C=(x_3,y_3)$, vertices de um triângulo.



$$S_{area} = \frac{1}{2}\text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2}\overline{BC} \times \overline{AH} \tag{5}$$

Para calcular a distância $\overline{BC}$, basta aplicar a distância entre pontos:

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2} \tag{6}$$

Para calcular a distância $\overline{AH}$, basta aplicar a distância entre o ponto A e a reta $\overline{BC}$. Lembrando que a equação geral de $\overline{BC}$ é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \overbrace{(y_2 - y_3)}^{a} x + \overbrace{(x_3 - x_2)}^{b} y + \overbrace{(x_2 y_3 - x_3 y_2)}^{c} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} AH &= \left| \frac{a x_1 + b y_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \\ &= \left| \frac{(y_2 - y_3) x_1 + (x_3 - x_2) y_1 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2}} \right| \\ &= \left| \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2}} \right| \end{aligned} \tag{8}$$

Substituindo 8 e 6 em 5, temos:

$$S_{area} = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}_{\overline{BC}} \underbrace{\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2}}}_{\overline{AH}} \tag{9}$$

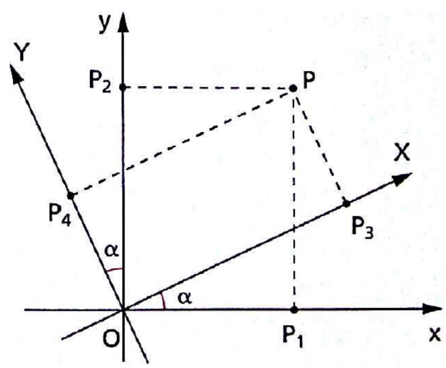
Simplificando 9, a área do triângulo pode ser calculada por

$$S_{area} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

3.4 Bissetriz dos ângulos de duas retas

$$\left| \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_1^2 + b_1^2} \right| \pm \left| \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_2^2 + b_2^2} \right| = 0$$

3.5 Rotação do sistema



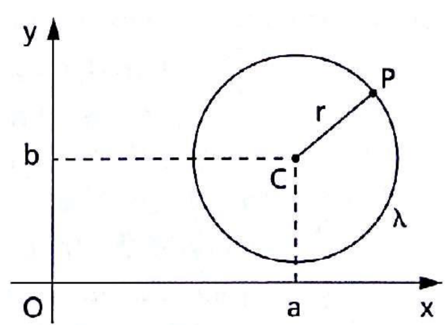
$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

Na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

4 Circunferências

Definição: Dados um ponto C, pretencente a um plano α, e uma distância $r \neq 0$, chama-se circunferência o conjunto de pontos de α que estão à distância r do ponto C. Podemos ainda escrever como $\lambda = \left\{P \in \alpha | \overline{PC} = r\right\}$



4.1 Equação reduzida

$$P \in \lambda \Leftrightarrow \overline{PC} = r$$

$$\therefore$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

4.2 Equação normal

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

4.3 Identificação

Seja uma equação de 2º grau em x e y

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

normalizando em torno de x^2 (ou seja, dividindo a expressão por A), encontramos citérios objetivos para identificar se a expressão representa uma circunferência, e calcular raio e centro.

4.3.1 Raio

$$\begin{cases} \dfrac{D}{A} = -2a \Rightarrow a = -\dfrac{D}{2A} & \text{termo } x \\ \dfrac{E}{A} = -2b \Rightarrow b = -\dfrac{E}{2A} & \text{termo } y \end{cases}$$

4.3.2 Centro

$$\begin{aligned} \frac{F}{A} &= a^2 + b^2 - r^2 \\ &\Downarrow \\ r^2 &= a^2 + b^2 - \frac{F}{A} \\ r^2 &= \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A} \\ r &= \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}} \\ &\therefore \\ r &= \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2\|A\|} \end{aligned} \tag{10}$$

4.3.3 Condição de existência

$$\begin{cases} A = B & \text{Condição para ser redonda, e não oval.} \\ C = 0 & \text{Termo } xy \text{ só existe nas cônicas.} \\ D^2 + E^2 - 4AF > 0 & \text{O raio } r \text{ deve ser um número real.} \end{cases}$$

4.4 Ponto e circunferência

Seja $P = (x_0, y_0)$ e $\lambda : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, então:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2 & \Leftrightarrow & P \text{ é interno a } \lambda \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 & \Leftrightarrow & P \in \lambda \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2 & \Leftrightarrow & P \text{ é externo a } \lambda \end{cases}$$

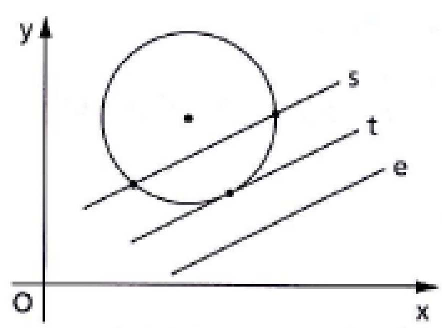
4.5 Reta e circunferência

Seja $s : Ax + By + C = 0$ e $\lambda : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, podemos representar s na forma reduzida e substituí-la dentro da equação de λ.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B} \\ \Downarrow \\ (x-a)^2 + (-\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B} - b)^2 - r^2 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Como A, B, C e r são números, da equação 11 obtemos uma expressão de segundo grau em função de y. Calculando o discriminante (Δ) dessa expressão, temos as seguintes condições:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Leftrightarrow s \text{ é secante a } \lambda \\ \Delta = 0 \Leftrightarrow s \text{ é tangente a } \lambda \\ \Delta > 0 \Leftrightarrow s \text{ é externa a } \lambda \end{cases}$$



Analogamente, podemos calcular a distância entre a reta s e a circunferência λ com a seguinte expressão:

$$d_{s,\lambda} = \left\| \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right\| \Rightarrow \begin{cases} d_{s,\lambda} < r \Leftrightarrow s \text{ é secante a } \lambda \\ d_{s,\lambda} = r \Leftrightarrow s \text{ é tangente a } \lambda \\ d_{s,\lambda} > r \Leftrightarrow s \text{ é externa a } \lambda \end{cases}$$

4.6 Duas circinferências

Seja $\lambda_1 : (x-a_1)^2+(y-b_1)^2 = r_1^2$ e $\lambda_2 : (x-a_2)^2+(y-b_2)^2 = r_2^2$, para analisar a posição relativa entre 2 circunferências, analisamos a distância entre seus pontos:

$$d = \overline{C_1C_2} = \sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$$

Dessa forma, podemos ter os seguintes casos:

$$\begin{cases} d > r_1 + r_2 \Leftrightarrow \text{circunferências exteriores} \\ d = r_1 + r_2 \Leftrightarrow \text{circunferências tangentes exteriormente} \\ d = r_1 + r_2 \Leftrightarrow \text{circunferências tangentes interiormente} \\ |r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2 \Leftrightarrow \text{circunferências secantes} \\ 0 < d < |r_1 - r_2| \Leftrightarrow \text{circunferência pequena dentro da grande} \\ d = 0 \Leftrightarrow \text{circunferências concêntricas} \end{cases}$$

Nos casos em que ocorre pontos de intersecção, basta colocar cada expressão na forma geral e iguala-las, para encontrar os pontos de intersecção/tangência.

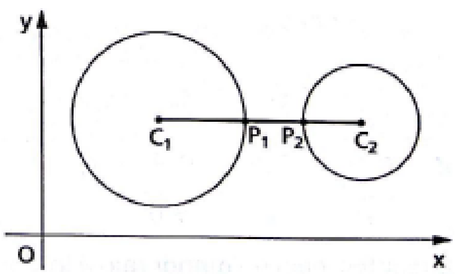


Figura 4: Exteriores

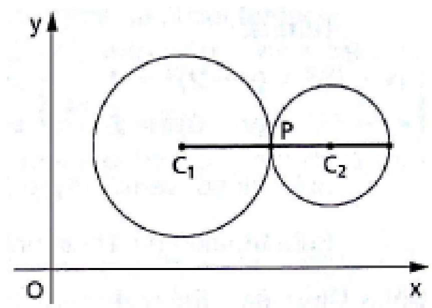


Figura 5: Tangentes exteriormente

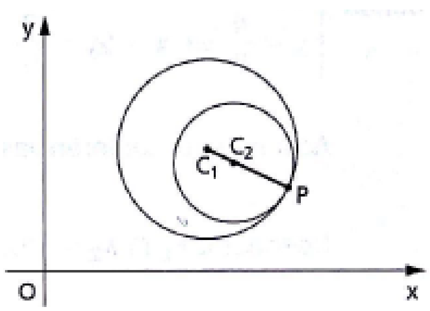


Figura 6: Tangentes interiormente

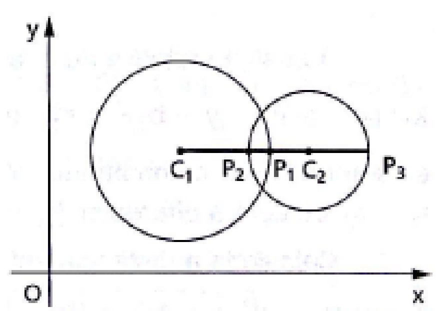


Figura 7: Secantes

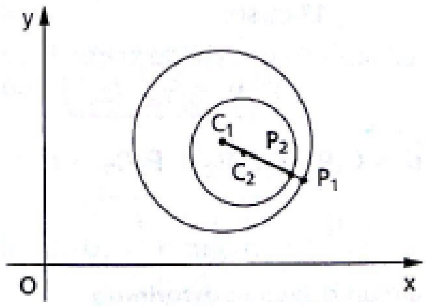


Figura 8: Caso complementar

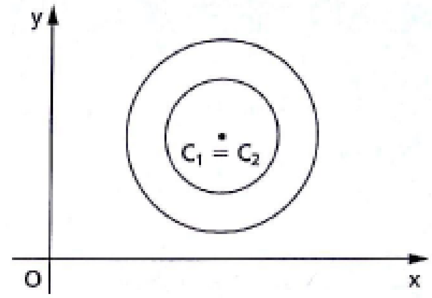


Figura 9: Concêntricas