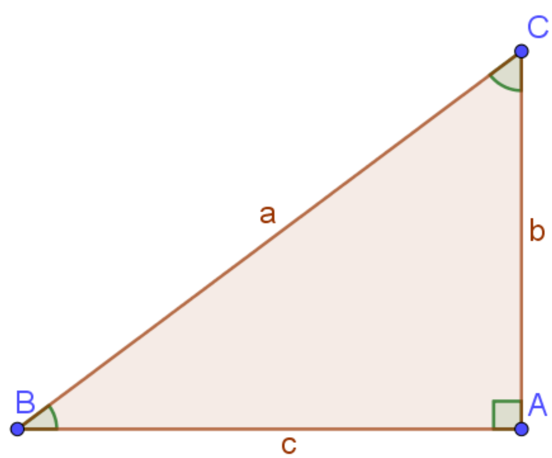
Trigonometria - Resumo

Eduardo Palhares Júnior

2 de junho de 2019

1 Trigonometria

1.1 Razões trigonométricas



$$\begin{cases} \sin \hat{B} = \dfrac{b}{a} & \cos \hat{B} = \dfrac{c}{a} \\ \tan \hat{B} = \dfrac{b}{c} & \cot \hat{B} = \dfrac{c}{b} \\ \sec \hat{B} = \dfrac{a}{c} & \csc \hat{B} = \dfrac{a}{b} \end{cases}$$

Portanto, podemos derivar as seguintes relações

$$\begin{cases} \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} & \cot x = \dfrac{1}{\tan x} \\ \sec x = \dfrac{1}{\cos x} & \csc x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$$

Tabela 1: Principais relações trigonométricas

	$\mathbf{0}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$
$\cot x$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\nexists$	0
$\sec x$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	0	-1	0
$\csc x$	0	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	0	-1

1.2 Adição e subtração de arcos

1.2.1 Seno da soma

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

1.2.2 Cosseno da soma

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

1.2.3 Seno da diferença

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Demonstração

$$\begin{aligned}
\sin(a-b) &= \sin(a+(-b)) && \text{definição} \\
&= \sin a \cos(-b) + \sin(-b) \cos a && \text{seno da soma} \\
&= \sin a \cos b + (-\sin b) \cos a && \text{funções par e ímpar} \\
&= \sin a \cos b - \sin b \cos a && \square
\end{aligned}$$

1.2.4 Cosseno da diferença

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Demonstração

$$\begin{aligned}
\cos(a-b) &= \cos(a+(-b)) && \text{definição} \\
&= \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) && \text{cosseno da soma} \\
&= \cos a \cos b + \sin a(-\sin b) && \text{funções par e ímpar} \\
&= \cos a \cos b - \sin a \sin b && \square
\end{aligned}$$

1.2.5 Seno do duplo arco

$$\sin(2a) = 2\cos a \cos a$$

Demonstração

$$\begin{aligned} \sin(2a) &= \sin(a + a) && \text{definição} \\ &= \sin a \cos a + \sin a \cos a && \text{seno da soma} \\ &= 2\sin a \cos a && \square \end{aligned}$$

1.2.6 Cosseno do duplo arco

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

Demonstração

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos(a + a) && \text{definição} \\ &= \cos a \cos a - \sin a \sin a && \text{seno da soma} \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a && \square \end{aligned}$$

1.2.7 Tangente da soma

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Demonstração

$$\begin{aligned} \tan(a + b) &= \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} && \text{expanda} \\ &= \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} && \text{divida por cos a.cos b} \\ &= \frac{\dfrac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\cos a \cos b}} && \text{separe os termos} \\ &= \frac{\dfrac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \dfrac{\sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \dfrac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} && \text{simplifique} \\ &\therefore \\ &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} && \square \end{aligned}$$

1.2.8 Tangente da diferença

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Demonstração Exercício

1.2.9 Cotangente da soma

$$\cot(a+b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b}$$

Demonstração Exercício

1.2.10 Cotangente da diferença

$$\cot(a-b) = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot b - \cot a}$$

Demonstração

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\cos(a-b)}{\sin(a-b)} && \text{expanda} \\
&= \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{\sin a \cos b - \sin b \cos a} && \text{divida por sin a.sin b} \\
&= \frac{\dfrac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{\sin a \sin b}}{\dfrac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{\sin a \sin b}} && \text{separe os termos} \\
&= \frac{\dfrac{\cos a \cos b}{\sin a \sin b} + \dfrac{\sin a \sin b}{\sin a \sin b}}{\dfrac{\sin a \cos b}{\sin a \sin b} - \dfrac{\sin b \cos a}{\sin a \sin b}} && \text{simplifique} \\
&\therefore \\
&= \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot b - \cot a} && \square
\end{aligned}$$

1.2.11 Funções circulares de 2ª ordem

$$\begin{cases} \cos 2a = \cos^2 2a - \sin^2 2a \Rightarrow \begin{cases} \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \\ \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2} \\ \sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2} \end{cases} \\ \sin 2a = \sin a \cos a \\ \tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} \end{cases}$$

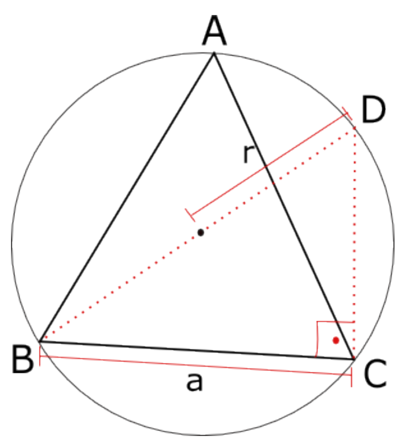
1.2.12 Fórmulas do produto

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right] \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right] \\ \sin x \sin y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) - \sin(x-y)\right] \end{cases}$$

1.3 Lei dos senos e cossenos

1.3.1 Lei dos senos

Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita.



Demonstração Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{A}'$ determinam a mesma corda $\overline{BC}$ na circunferência, portanto, são iguais. Dessa forma, o triângulo $A'BC$ é retângulo. Temos então:

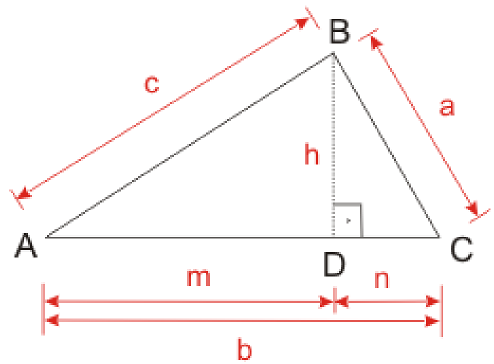
$$\sin \hat{A} = \frac{a}{2r} \Rightarrow 2r = \frac{a}{\sin \hat{A}}$$

Analogamente, temos:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2r$$

1.3.2 Lei dos cossenos

Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.



Demonstração Utilizando Pitágoras nos triângulos BCD e BAD, temos as seguintes relações

$$\begin{cases} a^2 = n^2 + h^2 & (1) \\ c^2 = m^2 + h^2 & (2) \end{cases}$$

Lembrando que $n = b - m$, podemos rearranjar 2 e substituir ambos em 1. Dessa forma, teremos:

$$\begin{aligned} a^2 &= (b-m)^2 + \left(c^2 - m^2\right) \\ &= b^2 - 2bm + m^2 + c^2 - m^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bm \\ &\therefore \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \end{aligned}$$

Analogamente, podemos provar que valem as seguintes relações

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} \end{cases}$$

1.3.3 Teorema interessante

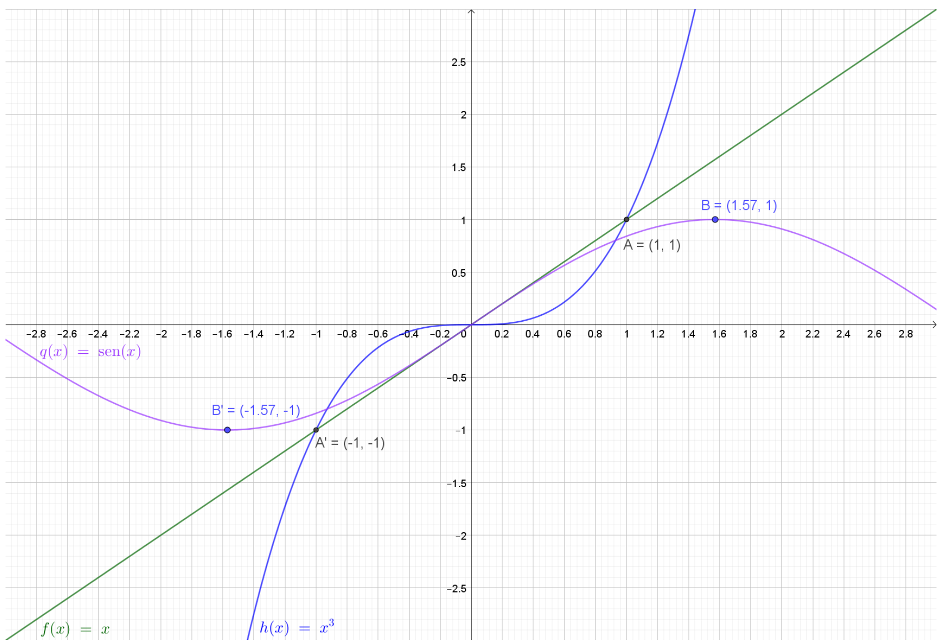
$$\begin{cases} a = b\cos\hat{C} + c\cos\hat{B} \\ b = a\cos\hat{C} + c\cos\hat{A} \\ c = a\cos\hat{B} + b\cos\hat{A} \end{cases}$$

Apêndice - Função par e impar

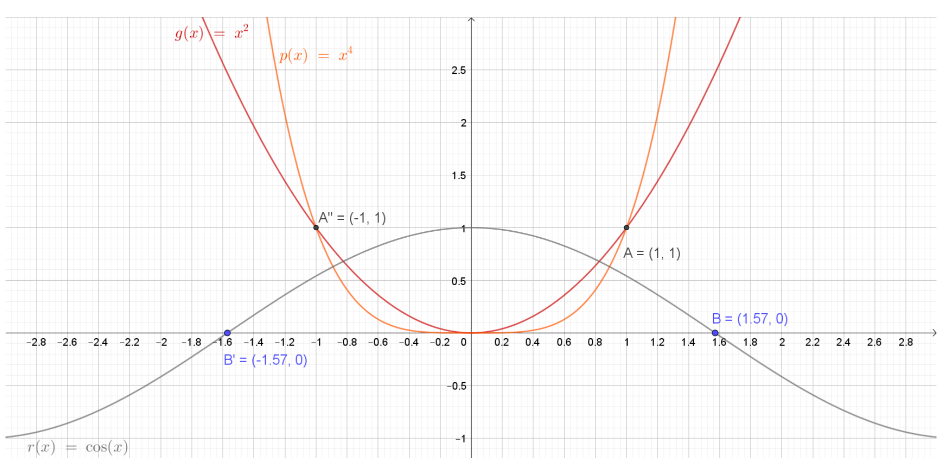
Definição

Seja $E \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto com a seguinte propriedade de simetria em relação à origem:

- Uma função $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita par se $f(-x) = f(x)$



- Uma função $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ímpar se $f(-x) = -f(x)$



A nomenclatura provém do fato que a função $f(x) = x^k$ é impar se k é um número ímpar e par se k é um número par.

Decomposição em funções par e ímpar

Toda função $f : R \implies \mathbb{R}$ definida em um conjunto E simétrico em relação à origem pode ser escrita como a soma de uma função par e uma função ímpar:

$$f(x) = f_i(x) + f_p(x) = \left(\frac{f(x) - f(-x)}{2}\right) + \left(\frac{f(x) + f(-x)}{2}\right)$$

Exemplo Seja $f(x) = e^x$, temos:

$$f(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \sinh(x) + \cosh(x)$$

Propriedades

- A única função par e ímpar ao mesmo tempo é a função nula ($f(x) = 0$).
- Há funções que não são nem pares nem ímpares.
- Uma função ímpar definida na origem é nula na origem.
- A soma de duas funções de mesma paridade mantem essa paridade.
- O produto de duas funções de mesma paridade é uma função par.
- O produto de duas funções com paridades distintas é uma função ímpar.
- A derivada de uma função par é uma função ímpar.
- A derivada de uma função ímpar é uma função par.