# Auto-valores e Auto-vetores

Eduardo Palhares Júnior

31 de agosto de 2022

## Questões

1. Seja a transformação $T\,(x, y, z) = (2x + 3y + z, -z, -y)$
   (a) Calcular os autovalores.
   (b) Determinar os auto-espaços.
   (c) A transformação é diagonalizável? Se sim, encontrar um espaço diagonalizado.

## Solução

### a) Calcular os autovalores

#### Passo 1 - Representar a transformação na forma matricial

$$T(x, y, z) = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}^{A} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}^{X} \tag{1}$$

#### Passo 2 - Escrever a definição de auto-valor e calcular o determinante

$$det(A - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot\lambda^2 - (2-\lambda) = \overbrace{(2-\lambda)}^{\lambda_1=2}\overbrace{(\lambda^2 - 1)}^{\lambda_{2,3}=\pm 1} = 0 \tag{2}$$

### b) Determinar os auto-espaços

#### Passo 3 - Substituir os autovalores na definição $A \cdot X = \lambda \cdot X$

**Auto-vetor associado ao auto-valor $\lambda_1 = 2$**

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 2x(l_1) \\ \quad\quad\quad - z = 2y(l_2) \\ \quad - \quad y \quad\quad = 2z(l_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \quad - z = 2y(l_2) \Rightarrow z = -2y(l_2) \\ -y \quad = 2z(l_3) \end{cases} \Rightarrow -y = -4y(l_3) \therefore y = 0$$

Recombinando $(l_2)$ e $(l_3)$ em função de $z$ encontraremos a mesma contradição, de maneira que $z = 0$. Dessa forma, a variável $x$ é independente e pode assumir qualquer valor. Por motivos de simplicidade adotaremos o valor 1.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

**Auto-vetor associado ao auto-valor $\lambda_2 = 1$**

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = x(l_4) \\ \qquad\qquad - z = y(l_5) \Rightarrow (2x - x) + (3y + (-y))(l_4) = 0 \therefore x = -2y(l_4^*) \\ \quad - \ y \qquad = z(l_6) \end{cases}$$

Considerando $x = 2$ em $(l_4^*)$ temos $y = -1$.
Agora, considerando y=1 em $(l_5)$ ou $(l_6)$, temos z=1.

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

**Auto-vetor associado ao auto-valor $\lambda_3 = -1$**

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = -x(l_7) \\ \qquad\qquad - z = -y(l_8) \Rightarrow (2x + x) + (3y + y)(l_7) = 0 \therefore x = -\frac{4}{3}y(l_7^*) \\ \quad - \ y \qquad = -z(l_9) \end{cases}$$

Considerando $x = 4$ em $(l_7^*)$ temos $y = -3$.
Agora, considerando y=-3 em $(l_8)$ ou $(l_9)$, temos z=-3.

$$v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

## c) A transformação é diagonalizável? Se sim, encontrar um espaço diagonalizado

### Passo 4 - Calcular o determinante para verificar se a matriz é inversível

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \tag{6}$$

Portanto a matriz é composta por vetores linearmente independentes entre sí, ou seja, o núcleo da transformação possuí dimensão nula.

### Passo 5 - Aplicar o teorema do núcleo e imagem

$$dim(T) = dim\,(Im(T)) + \cancel{dim\,(Ker(T))} \therefore dim(T) = dim\,(Im(T)) \tag{7}$$

**Passo 6 - Verificar se os autovetores são LI**

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$detP = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (3) - (-3) = 6 \neq 0 \tag{9}$$

**Passo 7 - Verificar as condições para o operador ser diagnolizável**

1. Como $dim(T) = dim\,(Im(T))$, $T$ é diagonalizável
2. Existe uma base LI de $T$, formada pelos auto-vetores $v_1$, $v_2$ e $v_3$.

As duas condições são equivalentes, ou seja, bastaria aplicar o **passo 6**.

**Passo 8 - Construir a representação diagonalizada**

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = D \tag{10}$$

Substituindo os valores para o problema proposto, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

É importante ressaltar que foi omitido o cálculo de $P^{-1}$, pois é bastante trabalhoso e só serviria para testar a equação 11. Conceitualmente, os resultados apresentados são suficientes para mostrar a existência do espaço diagonalizado.

Essa conclusão elegante comprova conhecimento de álgebra linear, uma vez que substituí calculos enfadonhos pela aplicação dos resultados conceituais demonstrados em aula.

# Referências

[1] professorpalhares.com.br