

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Eduardo Palhares Júnior

MODELAGEM MATEMÁTICA E CONTROLE NÃO-LINEAR DE UMA VIGA FLEXÍVEL  
NÃO-LINEAR CONSIDERANDO ITERAÇÃO FLUÍDO-ESTRUTURA E VÔO PAIRADO  
(HOVERING)

Dissertação de Mestrado

Santo André SP  
Janeiro de 2015

Eduardo Palhares Júnior

MODELAGEM MATEMÁTICA E CONTROLE NÃO-LINEAR DE UMA VIGA FLEXÍVEL  
NÃO-LINEAR CONSIDERANDO ITERAÇÃO FLUÍDO-ESTRUTURA E VÔO PAIRADO  
(HOVERING)

Dissertação de Mestrado

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da  
Universidade Federal do ABC, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em  
Engenharia Mecânica.

Orientador: André Fenili  
Karl Peter Burr

Santo André, SP – Brasil  
Janeiro de 2015

*Dedicatória.*

## **Agradecimentos**

Agradcimentos.

## Resumo

No presente trabalho, é investigado o modelo matemático de uma viga não linear com seção retangular em rotação. Foi considerado, no modelo, curvatura linear e condições de contorno de viga livre-engastada. Para simulação, considera-se ainda ângulo de ataque constante e as não linearidades resultantes do acoplamento entre a velocidade angular do eixo de rotação e vibração transversal da viga. As forças externas de arrasto e sustentação ao longo do comprimento da viga foram modeladas utilizando teoria de faixas. Estas forças são funções não lineares da velocidade transversal da viga e da velocidade angular do eixo de rotação. As equações de governo para a viga foram discretizadas no espaço utilizando-se o método das diferenças finitas. Isso resulta em uma sistema de equações diferenciais para os valores nodais da discretização espacial da viga. Esse conjunto de equações diferenciais é integrado numericamente no domínio do tempo utilizando-se um método de Runge-Kutta de quarta ordem.

**Palavras-chave:** dinâmica não-linear, viga flexível em rotação, interação fluído-estrutura, diferenças finitas, modos assumidos, Runge-Kutta

## **Abstract**

In this work, we investigate the mathematical model of a nonlinear beam with rectangular cross section in rotation. It was considered, in the model, linear curvature and boundary conditions of clamped-free. To simulation, still considered constant attack angle and the nonlinearities resulting from the coupling between the angular velocity of the rotation axis and transverse vibration of the beam. The external drag and lift forces along the length of the beam were modeled as turbulent drag and potential generated by the lift force. These forces are dependent on the speed of nonlinear excitations acting on the beam. The solution in space was obtained from the finite difference method using 5 points, and the solution in the time from the Runge-Kutta method of 4th order.

**Keywords:** nonlinear dynamics, rotating flexible beam, fluid-structure interaction, finite differences, assumed modes, Runge-Kutta

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Equações Governantes do Movimento</b>	<b>5</b>
2.1	Energia Cinética e Potencial, Lagrangeano e Trabalho Virtual . . . . .	7
2.1.1	Cilindro . . . . .	7
2.1.2	Viga . . . . .	7
2.1.3	Lagrangiano do Sistema . . . . .	8
2.1.4	Princípio do Trabalho Virtual . . . . .	9
2.2	Princípio Extendido de Hamilton . . . . .	11
2.3	Equações de Euler-Lagrange . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Discretização</b>	<b>16</b>
3.1	Diferenças Finitas . . . . .	18
3.2	Modos Assumidos . . . . .	21
3.3	Runge-Kutta . . . . .	26
3.3.1	Desacoplando o Sistema . . . . .	26
3.3.2	Forma de Estados . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Projeto do Controlador</b>	<b>29</b>
4.1	Resposta do Sistema para Diferentes Valores de Ganho . . . . .	32
4.2	Resposta do Sistema para Diferentes Valores de Velocidade e Ângulo de Ataque . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>56</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>58</b>
<b>A</b>	<b>Apêndice A - Regra de Simpson Extendida</b>	<b>61</b>
<b>B</b>	<b>Apêndice B - Diferenças Finitas</b>	<b>62</b>
B.1	Diferença Centrada e Condições de Contorno . . . . .	63
B.1.1	Nó $x_1$ . . . . .	63
B.1.2	Nó $x_2$ . . . . .	63
B.1.3	Nó $x_{N-1}$ . . . . .	64
B.1.4	Nó $x_N$ . . . . .	65

B.2	Coeficientes de Diferenças Finitas Centrada . . . . .	66
<b>C</b>	<b>Apêndice C - Modos Assumidos</b>	<b>67</b>
<b>D</b>	<b>Apêndice D - Runge-Kutta de 4ª Ordem</b>	<b>72</b>
<b>E</b>	<b>Apêndice E - Código em Matlab</b>	<b>74</b>
E.1	Rotina Principal - executa as outras rotinas . . . . .	74
E.2	Rotina dados - carrega as condições iniciais e de contorno do problema . . . . .	75
E.3	Rotina M - discretiza a matriz de massa via diferenças finitas . . . . .	79
E.4	Rotina K - discretiza a matriz de rigidez via diferenças finitas . . . . .	79
E.5	Rotina D4 - constroe o operador de diferenciação de 4ª ordem . . . . .	80
E.6	Rotina W - constroe o operador de integração de Simpson . . . . .	81
E.7	Rotina EI - constroe a matriz diagonal E*I . . . . .	82
E.8	Rotina F - discretiza o vetor de forças via diferenças finitas . . . . .	82
E.9	Rotina RK - aplica o método de Runge-Kutta na discretização via diferenças finitas . . . . .	82
E.10	Rotina M - discretiza a matriz de massa via modos assumidos . . . . .	89
E.11	Rotina K - discretiza a matriz de rigidez via modos assumidos . . . . .	89
E.12	Rotina F - discretiza o vetor de forças via modos assumidos . . . . .	90
E.13	Rotina RK - aplica o método de Runge-Kutta na discretização via modos assumidos . . . . .	90



# Lista de Figuras

Figura 2.1.	viga flexível em rotação interagindo com o fluido. . . . .	5
Figura 4.1.	Resposta do último nó para $\alpha = 5$ - Q1(contínuo) vs Q2(tracejado) . . .	33
Figura 4.2.	Resposta de $h$ para $\alpha = 5$ - Q1(contínuo) vs Q2(tracejado) . . . . .	33
Figura 4.3.	Resposta de $\dot{h}$ para $\alpha = 5$ - Q1(contínuo) vs Q2(tracejado) . . . . .	34
Figura 4.4.	Resposta de $\theta$ para $\alpha = 5$ - Q1(contínuo) vs Q2(tracejado) . . . . .	34
Figura 4.5.	Resposta de $\dot{\theta}$ para $\alpha = 5$ - Q1(contínuo) vs Q2(tracejado) . . . . .	35
Figura 4.6.	Força de controle em $\theta$ para $\alpha = 5$ - Q1(contínuo) vs Q2(tracejado) . . .	35
Figura 4.7.	Resposta do último nó para $\alpha = 0$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto) . . . . .	37
Figura 4.8.	Resposta de $h$ para $\alpha = 0$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto) . . . . .	37
Figura 4.9.	Resposta de $\dot{h}$ para $\alpha = 0$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto) . . . . .	38
Figura 4.10.	Resposta de $\theta$ para $\alpha = 0$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto) . . . . .	38
Figura 4.11.	Resposta de $\dot{\theta}$ para $\alpha = 0$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto) . . . . .	39
Figura 4.12.	Força de controle em $\theta$ para $\alpha = 0$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto) . . . . .	39
Figura 4.13.	Resposta do último nó para $\alpha = 1$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto) . . . . .	40
Figura 4.14.	Resposta de $h$ para $\alpha = 1$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto) . . . . .	40
Figura 4.15.	Resposta de $\dot{h}$ para $\alpha = 1$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto) . . . . .	41
Figura 4.16.	Resposta de $\theta$ para $\alpha = 1$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto) . . . . .	41
Figura 4.17.	Resposta de $\dot{\theta}$ para $\alpha = 1$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto) . . . . .	42
Figura 4.18.	Força de controle em $\theta$ para $\alpha = 1$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto) . . . . .	42

Figura 4.19.	Resposta do último nó para $\alpha = 2$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto) . . . . .	43
Figura 4.20.	Resposta de $h$ para $\alpha = 2$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto) . . . . .	43
Figura 4.21.	Resposta de $\dot{h}$ para $\alpha = 2$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto) . . . . .	44
Figura 4.22.	Resposta de $\theta$ para $\alpha = 2$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto) . . . . .	44
Figura 4.23.	Resposta de $\dot{\theta}$ para $\alpha = 2$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto) . . . . .	45
Figura 4.24.	Força de controle em $\theta$ para $\alpha = 2$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto) . . . . .	45
Figura 4.25.	Resposta do último nó para $\alpha = 3$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto) . . . . .	46
Figura 4.26.	Resposta de $h$ para $\alpha = 3$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto) . . . . .	46
Figura 4.27.	Resposta de $\dot{h}$ para $\alpha = 3$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto) . . . . .	47
Figura 4.28.	Resposta de $\theta$ para $\alpha = 3$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto) . . . . .	47
Figura 4.29.	Resposta de $\dot{\theta}$ para $\alpha = 3$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto) . . . . .	48
Figura 4.30.	Força de controle em $\theta$ para $\alpha = 3$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto) . . . . .	48
Figura 4.31.	Resposta do último nó para $\alpha = 4$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto) . . . . .	49
Figura 4.32.	Resposta de $h$ para $\alpha = 4$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto) . . . . .	49
Figura 4.33.	Resposta de $\dot{h}$ para $\alpha = 4$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto) . . . . .	50
Figura 4.34.	Resposta de $\theta$ para $\alpha = 4$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto) . . . . .	50
Figura 4.35.	Resposta de $\dot{\theta}$ para $\alpha = 4$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto) . . . . .	51
Figura 4.36.	Força de controle em $\theta$ para $\alpha = 4$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto) . . . . .	51
Figura 4.37.	Resposta do último nó para $\alpha = 5$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto) . . . . .	52

Figura 4.38. Resposta de $h$ para $\alpha = 5$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto) . . . . .	52
Figura 4.39. Resposta de $\dot{h}$ para $\alpha = 5$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto) . . . . .	53
Figura 4.40. Resposta de $\theta$ para $\alpha = 5$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto) . . . . .	53
Figura 4.41. Resposta de $\dot{\theta}$ para $\alpha = 5$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto) . . . . .	54
Figura 4.42. Força de controle em $\theta$ para $\alpha = 5$ - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto) . . . . .	54
Figura 4.43. Evolucao temporal da viga para $\alpha = 5$ e $\dot{\theta} = 100rad/s$ . . . . .	55
Figura B.1. discretização espacial da viga. . . . .	62

# **Lista de Tabelas**

Estudos sobre o comportamento dinâmico de estruturas flexíveis em rotação representam uma área de pesquisa de grande interesse para a comunidade científica de todo o mundo, assim como para as indústrias que desenvolvem tecnologia, devido à ampla gama de aplicação dessas estruturas nas mais diversas áreas. Os principais objetivos envolvidos nesses estudos são, em geral, controle de vibração, projeto de estruturas mais leves e mais rápidas para aplicações diversas em projetos ligados a áreas como civil, mecânica, robótica, aeroespacial, oceânica dentre muitas outras. Podemos citar como alguns das principais aplicações:

- Manipuladores robóticos leves;
- Painéis solares ou antenas para satélites;
- Pás de helicóptero ou turbinas eólicas.

Segundo Laks et al. (n.d.), o investimento em energia eólica mundial que em 2006 foi próximo de 18 bilhões de dólares, deve aumentar para 60 bilhões em 2016. Os Estados Unidos possuem potencial para gerar 20% de sua energia a partir de geração eólica, porém, utilizam aproximadamente apenas 1%. Cao et al. (n.d.) sugere que com o desenvolvimento de estudos em confiabilidade, eficiência econômica, e mobilidade os helicópteros modernos podem se tornar os veículos mais econômicos, eficazes e rápidos do futuro. De fato, em um mundo cada vez mais competitivo, novas demandas estão constantemente exigindo mais segurança, agilidade, autonomia e eficácia que estão fortemente calcadas em aspectos como estabilidade, dinâmica e técnicas de controle.

Em geral, estruturas em rotação comumente utilizadas em aplicações reais apresentam flexibilidade, devido à própria natureza dos materiais utilizados, e a interação com o meio. Conlisk (1997) discute que, essa flexibilidade incorpora não linearidades na dinâmica do sistema, que podem ser bastante significativas dependendo das características estruturais e do regime de operação. Fenômenos de natureza vibratória decorrentes dessa flexibilidade podem, por si só, trazer problemas de estabilidade, mas quando acoplados com outros efeitos de dispositivos comuns

nesses tipos de sistemas, tornam a modelagem bastante complexa e instável. Reffley and Mních (1986) discute a flexibilidade envolvida na modelagem individual, bem como a importância de realizar simplificações em uma primeira análise e analisar separadamente alguns desses elementos.

Talbot et al. (1982) modela o rotor de um helicóptero assumindo as pás rígidas, onde a força do rotor e os momentos radiais são somados ao azimute. Takahashi (1990) e Hald et al. (2006) consideram um modelo de rotor com hastes rígidas e acoplado por dobradiças que permitem movimentos de batimento, arrasto e passo, além de alguns efeitos gerados pela flexão e torção, mas ambas as abordagens realizam linearização dos modelos. Pan and Renliang (n.d.) modela um helicóptero considerando características de flexibilidade incluindo termos não lineares de ordem superior, enquanto Laks et al. (n.d.) modela uma turbina eólica com a abordagem de haste flexível.

Dentre os desafios apresentados por Laks et al. (n.d.) em relação a eficácia nos projetos de controle em turbinas eólicas, podemos citar o desenvolvimento de pás inteligentes baseados em sensores e atuadores que tenham alto nível de confiabilidade e ausência de fadiga. Schubel and Crossley (2012) comenta sobre o conflito de eficiência envolvendo aerofólio finos/grossos, pois devido a questões de custo, os fabricantes tem buscado um aumento de eficiência aumentando apenas o tamanho da pá, sem se preocupar com aspectos de otimização aerodinâmica do perfil.

Diversos autores discutem a importância dos modelos computacionais como primeiro passo na compreensão de fenômenos acoplados, bem como ferramenta de projeto de controladores. Takahashi (1990), Reffley and Mních (1986) e Conlisk (1997) apresentam as limitações geradas pelo alto custo computacional envolvido em modelos complexos, e conseqüentemente a importância dos métodos de linearização, discretização e integração numérica eficiente para cada regime de operação, pois como comentado por Pan and Renliang (n.d.), cada regime possui efeitos cinemáticos implícitos. Conlisk (1997) reforça o alto custo e risco envolvidos em testes reais, bem como a divergência dos resultados experimentais obtidos nos testes em escala, dependendo do regime de operação, sendo o ruído muitas vezes um fator limitante. Bielawa (1984) realiza simulações em diversos rotores, com o objetivo de analisar o amortecimento de vibração na pá, bem como as fortes excitações geradas pela vibração do hub e os controles de pitch. Pettersen et al. (2005) utilizou o ambiente Simulink e parâmetros de projeto para simular um modelo simples que correspondeu ao esperado, enquanto Hald et al. (2006) utilizando a mesma abordagem para o estudo de voo autônomo, porém, estendendo a análise para testes de voo. Para garantir uma resposta mais rápida e precisa no protótipo, Hald et al. (2006) projetou o controlador em linguagem C, e utilizou diversas ferramentas projetadas inicialmente no ambiente de simulação como parâmetros do modelo, ganhos e estimadores de estado (Filtro de Kalman), mas ainda assim verificou que condições severas de velocidade ou velocidade do

vento faziam o modelo e o caso real divergirem.

Conlisk (1997) discute a importância de métodos de discretização de ordem superior associados a regimes de grade adaptativa para reduzir o custo computacional e ao mesmo tempo aumentar a precisão. Çimen (2008) reforça as vantagens de utilização do método SDRE (State-Dependent Riccati Equation), pelo fato de ser facilmente implementado junto a algoritmos computacionais simples como método de Euler e Runge-Kutta. Segundo Menon and Ohlmeyer (n.d.) a simplicidade computacional da técnica SDRE em conjunto com os atuais avanços tecnológicos torna-a ideal, pois consegue operar em tempo real, como mostrado por Langson and Alleyne (2002) no problema de referencia não-linear, pelos experimentos de levitação magnética de Erdem and Alleyne (2004), no controle de acionamento de um míssil guiado de Mertopcuoglu et al. (n.d.), nos testes de controle de pequenos helicópteros autônomos de Bogdanov and Wan (n.d.b), e no projeto de controle de grandes petroleiros de Çimen (2009).

Dentre as aplicações de SDRE em plantas reais que são encontradas na literatura, uma das pioneiras foi Innocenti et al. (2000), que aplica a técnica em um manipulador robótico para controlar o caminho percorrido. O objetivo principal era a validação do método em uma planta real, mas os resultados obtidos foram muito satisfatórios quando comparados a técnicas clássicas como PID e outros métodos de controle de torque.

Bogdanov and Wan (n.d.a) utiliza SDRE para controle de manobras ágeis em um pequeno helicóptero autônomo, mas para que o sistema responda em tempo real, é necessário que o controle seja pré-alimentado. Cloutier and Stansbery (2001) aplica SDRE no controle do piloto automático de um míssil ar-ar, onde a malha externa converte leituras de ângulo de ataque, guinada e rolamento, atuando sobre a malha interna que controla a atitude do leme.

Chang (2010) utiliza o conceito de tethers para acoplar 3 satélites que são modelados como corpo rígido, e aplica SDRE para corrigir os erros de atitude. Singh et al. (2008) utiliza SDRE para controle de um pêndulo invertido montando sobre uma base deslizante, que representa uma rica classe de sistemas não lineares sub-atuados. Além de apresentar resultados mais satisfatórios que controladores baseados em métodos de energia, podem ser projetados dentro das limitações físicas do sistema, onde o tratamento das restrições e das condições de controle transiente é incorporado na modelagem. Chang (2010) e Singh et al. (2008) utilizaram uma abordagem Lagrangiana para modelagem das equações de movimento.

Baixo amortecimento, frequências naturais pequenas e massas extremamente leves estão entre as características comuns desses sistemas que os tornam vulneráveis a quaisquer distúrbios externos ou mesmo internas (como manobras de giro com grandes velocidades, impactos, interação com fluido, etc.). Manipuladores robóticos com tais características são possíveis de

realizar, mas necessitam de atuadores menores e normalmente necessitam de um maior espaço de trabalho para alcançar os objetivos, uma vez que são mais finas e compridas do que as estruturas rígidas geralmente utilizadas para a mesma tarefa.

Ao lidar com este tipo de estruturas rotativas, a interação entre o deslocamento angular  $\theta$ , também chamado de ângulo de rotação, e a variável estrutura deflexão flexível  $v(x, t)$ , pode ser muito importante em alguns casos, como em manobras com rotores que possuem alta velocidade angular. A inclusão dos efeitos de arrasto e da sustentação, ainda que de forma simplificada, incorpora na dinâmica do sistema a interação entre a estrutura e o fluido circundante, como, o ar ou a água. Esta interação desempenha um papel importante na compreensão de como o fluido dissipa a energia cinética de movimento e executa trabalho no sistema, o que pode alterar significativamente o desempenho da eficiência do controle.



## Equações Governantes do Movimento

O sistema investigado consiste em uma viga flexível engastada em cilindro rígido em rotação. A viga pode ser representada como a primeira aproximação de uma asa ou pá de uma hélice, assim como o cilindro pode ser representado como a primeira aproximação para o cubo do rotor. A interação da estrutura com o fluido produz movimentos da estrutura e a ação do fluido sobre esta é representada pelas forças de sustentação e arrasto. A figura 2.1 representa o modelo geométrico do sistema a ser investigado.

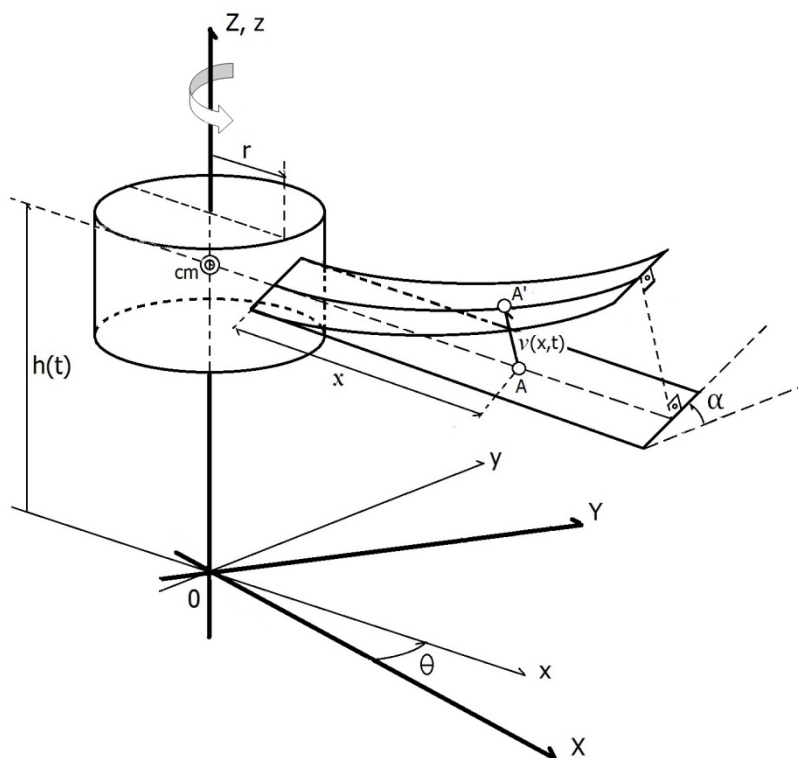


Figura 2.1: viga flexível em rotação interagindo com o fluido.

A tabela 1 apresenta as grandezas física tratadas nesse sistema, bem como as unidades de medidas consideradas:

<b>Símbolo</b>	<b>Descrição</b>	<b>Unidade</b>
<b>Constantes da Estrutura</b>		
$m_H$	Massa do hub	Kg
$m_V$	Massa da viga	Kg
$I_H$	Momento de inércia do hub	$m^4$
E	Módulo de elasticidade do material	$Kg/ms^2$
g	Aceleração da gravidade	$m/s^2$
$\rho$	Massa específica da viga	$Kg/m^3$
A	Área da seção transversal da viga	$m^2$
l	Comprimento da viga	m
r	Raio do hub	m
$\alpha$	Ângulo de ataque da viga	rad
<b>Constantes do Fluido</b>		
$\rho_f$	Massa específica do fluido	$Kg/m^3$
c	Corde da viga	m
U	Velocidade do Fluido	m/s
$C_L$	Coefficiente de sustentação	-
$C_D$	Coefficiente de arrasto	-
<b>Variáveis de Estado</b>		
h	Altitude do centro de massa do hub	m
$\dot{h}$	Velocidade vertical do centro de massa do hub	$m/s$
$\ddot{h}$	Aceleração vertical do centro de massa do hub	$m/s^2$
$\theta$	Ângulo horizontal da viga	rad
$\dot{\theta}$	Velocidade angular horizontal da viga	$rad/s$
$\ddot{\theta}$	Aceleração angular horizontal da viga	$rad/s^2$
$\nu$	Deflexão da viga	-
$\nu'$	Primeira derivada espacial da deflexão	$1/m$
$\nu''$	Segunda derivada espacial da deflexão	$1/m^2$
$\dot{\nu}$	Velocidade de deflexão	$1/s$
$\ddot{\nu}$	Aceleração de deflexão	$1/s^2$

Podemos verificar que a aplicação de um torque  $T$  em torno do eixo  $z$  provoca deslocamento angular  $\theta$ , e temos ainda a deflexão na viga  $\nu(x, t)$  devido as forças de arrasto e sustentação geradas pelo ângulo ataque  $\alpha$ , que irá provocar uma variação da altura  $h$ . Temos ainda um eixo de inércia representado por  $XYZ$  e um eixo móvel que acompanha o movimento de rotação, representado por  $xyz$ .

## 2.1 Energia Cinética e Potencial, Lagrangeano e Trabalho Virtual

As equações de governo são obtidas a partir do método da energia, através da aplicação do Princípio Extendido de Hamilton. Para tanto será necessário escrever a energia cinética e potencial de cada elemento do sistema, bem como o trabalho virtual das forças externas exercidas pelo fluido.

### 2.1.1 Cilindro

Segundo Fenili et al. (2013), a energia cinética para o cilindro pode ser escrita como a contribuição da energia cinética de rotação e translação

$$T_{\text{cilindro}} = \frac{1}{2}m_H\dot{h}^2 + \frac{1}{2}I_H\dot{\theta}^2 \quad (2.1)$$

A energia potencial para o cilindro pode ser descrita como a contribuição da força gravitacional

$$V_{\text{cilindro}} = m_Hgh \quad (2.2)$$

### 2.1.2 Viga

A energia cinética para uma viga pode ser escrita como

$$T_{\text{barra}} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A |\vec{V}_G|^2 dx \quad (2.3)$$

Tomando um elemento de viga distante de  $x$  do cilindro de raio  $r$ , e cuja largura seja  $dx$ , podemos descrever a posição do centro de massa desse elemento em relação à base fixa no corpo como

$$\vec{R}_G = (r + x)\vec{i} - v \sin \alpha \vec{j} + [h + v \cos \alpha]\vec{k} \quad (2.4)$$

Derivando em relação ao tempo, temos

$$\dot{\vec{R}}_G = (r + x)\dot{\vec{i}} - \dot{v} \sin \alpha \vec{j} - v \sin \alpha \dot{\vec{j}} + [\dot{h} + \dot{v} \cos \alpha]\vec{k} \quad (2.5)$$

onde  $\dot{\vec{i}} = \dot{\theta} \vec{k} \wedge \vec{i} = \dot{\theta} \vec{j}$  e  $\dot{\vec{j}} = \dot{\theta} \vec{k} \wedge \vec{j} = -\dot{\theta} \vec{i}$ .

Substituindo e tomando o quadrado da velocidade do elemento de viga, temos

$$\begin{aligned} |\vec{V}_G|^2 &= \dot{\theta}^2 v^2 \sin^2 \alpha + [(r + x)\dot{\theta} - \dot{v} \sin \alpha]^2 + [\dot{v} \cos \alpha + \dot{h}]^2 \\ &= \dot{\theta}^2 v^2 \sin^2 \alpha + \dot{\theta}^2 (r + x)^2 - 2\dot{\theta} \dot{v} (r + x) \sin \alpha + \dot{h}^2 + 2\dot{h} \dot{v} \cos \alpha + \dot{v}^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dessa forma a energia cinética de uma viga pode ser representada como

$$T_{\text{barra}} = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left[ \dot{\theta}^2 v^2 \sin^2 \alpha + \dot{\theta}^2 (r+x)^2 - 2\dot{\theta}\dot{v}(r+x) \sin \alpha + \dot{h}^2 + 2\dot{h}\dot{v} \cos \alpha + \dot{v}^2 \right] dx \quad (2.7)$$

A energia potêncial da mesma viga pode ser representada como

$$V_{\text{barra}} = \int_0^l \rho A g (h + v \cos \alpha) dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI (v'')^2 dx \quad (2.8)$$

### 2.1.3 Lagrangiano do Sistema

O lagrangiano é definido como a diferença entre energia cinética e a potêncial

$$L = T - V \quad (2.9)$$

onde

$$T = T_{\text{cilindro}} + T_{\text{barra}} \quad (2.10)$$

$$V = V_{\text{cilindro}} + V_{\text{barra}} \quad (2.11)$$

Assim o lagrangiano toma a seguinte forma

$$L = \frac{1}{2} m_H \dot{h}^2 + \frac{1}{2} I_H \dot{\theta}^2 - m_H g h + \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left[ \dot{\theta}^2 v^2 \sin^2 \alpha + \dot{\theta}^2 (r+x)^2 - 2\dot{\theta}\dot{v}(r+x) \sin \alpha + \dot{h}^2 + 2\dot{h}\dot{v} \cos \alpha + \dot{v}^2 \right] dx - \int_0^l \rho A g (h + v \cos \alpha) dx - \frac{1}{2} \int_0^l EI (v'')^2 dx \quad (2.12)$$

Podemos ainda avaliar a primeira variação do lagrangiano

$$\begin{aligned} \delta L = & m_H \dot{h} \delta \dot{h} + I_H \dot{\theta} \delta \dot{\theta} - m_H g \delta h + \rho A \int_0^l \left[ \dot{\theta} (r+x)^2 \delta \dot{\theta} - \dot{v} (r+x) \sin \alpha \delta \dot{\theta} \right. \\ & \left. - \dot{\theta} (r+x) \sin \alpha \delta \dot{v} + \dot{h} \delta \dot{h} + \dot{v} \cos \alpha \delta \dot{h} + \dot{h} \cos \alpha \delta \dot{v} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{\theta} v^2 \sin^2 \alpha \delta \dot{\theta} \right. \\ & \left. + \dot{\theta}^2 v \sin^2 \alpha \delta v - g(\delta h + \delta v \cos \alpha) - \frac{EI}{\rho A} v'' \delta v'' \right] dx \end{aligned} \quad (2.13)$$

## 2.1.4 Princípio do Trabalho Virtual

O trabalho virtual das forças de interação entre uma seção da viga e o fluido pode ser modelado como

$$\delta W_{\text{seção}} = \left\{ \vec{L}_{\text{seção}} + \vec{D}_{\text{seção}} \right\} \cdot \left\{ v \sin \alpha \delta \theta \vec{i} + [(r+x)\delta\theta - \delta v \sin \alpha] \vec{j} + [\delta v \cos \alpha + \delta h] \vec{k} \right\} \quad (2.14)$$

no entanto, é razoável admitir que a velocidade horizontal é muito maior do que a vertical. Dessa forma, a força de arrasto pode ser projetada apenas na direção horizontal e a força de sustentação somente na direção vertical.

Podemos então representar o trabalho virtual gerado pelas forças de arrasto e sustentação em uma dada seção como

$$\delta W_{\text{seção}} = \frac{1}{2} \rho_f U^2 c C_L(\alpha) [\delta v \cos \alpha + \delta h] - \frac{1}{2} \rho_f c \sin \alpha C_D U^2 [(r+x)\delta\theta - \delta v \sin \alpha] \quad (2.15)$$

onde  $\rho_f$  é a densidade do fluido,  $C_L(\alpha)$  é o coeficiente de sustentação da seção da viga,  $C_D$  é o coeficiente de arrasto da seção da viga e  $c$  a corda (largura da seção). A velocidade  $U$  é a velocidade do fluido em relação a seção, e então podemos representar o seu quadrado por

$$U^2 = [(r+x)\dot{\theta} - \dot{v} \sin \alpha]^2 + [\dot{v} \cos \alpha + \dot{h}]^2 \quad (2.16)$$

Assim podemos escrever o trabalho virtual total realizado pelas forças de arrasto e sustentação como

$$\delta W_f = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \left( [(r+x)\dot{\theta} - \dot{v} \sin \alpha]^2 + [\dot{v} \cos \alpha + \dot{h}]^2 \right) (\rho_f c C_L(\alpha) [\delta v \cos \alpha + \delta h] - \rho_f c \sin \alpha C_D [(r+x)\delta\theta - \delta v \sin \alpha]) \right\} dx \quad (2.17)$$

O trabalho virtual associado ao torque  $T$  aplicado ao eixo de simetria do cilindro (eixo  $z$ ) é dado por

$$\delta W_T = T \delta \theta \quad (2.18)$$

Logo o trabalho virtual total é a soma do trabalho virtual associado ao torque  $T$  e a interação com o fluido, ou seja:

$$\begin{aligned}\delta W &= \delta W_f + \delta W_T \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \left( [(r+x)\dot{\theta} - \dot{v} \sin \alpha]^2 + [\dot{v} \cos \alpha + \dot{h}]^2 \right) (\rho_f c C_L(\alpha) [\delta v \cos \alpha + \delta h] \right. \\ &\quad \left. - \rho_f c \sin \alpha C_D [(r+x)\delta\theta - \delta v \sin \alpha] \right\} dx + T \delta\theta\end{aligned}\quad (2.19)$$

Podemos representar o trabalho virtual em termos das forças generalizadas  $Q_H$ ,  $q_v$  e  $Q_\theta$  como

$$\delta W = Q_H \delta h + \int_0^L q_v \delta v dx + Q_\theta \delta\theta \quad (2.20)$$

onde

$$Q_H = \frac{1}{2} \rho_f c \int_0^L \left\{ \left( [(r+x)\dot{\theta} - \dot{v} \sin \alpha]^2 + [\dot{v} \cos \alpha + \dot{h}]^2 \right) C_L(\alpha) \right\} dx \quad (2.21)$$

$$q_v = \frac{1}{2} \left( [(r+x)\dot{\theta} - \dot{v} \sin \alpha]^2 + [\dot{v} \cos \alpha + \dot{h}]^2 \right) (\rho_f c C_L(\alpha) \cos \alpha + \rho_f c C_D \sin^2 \alpha) \quad (2.22)$$

$$Q_\theta = T - \frac{1}{2} \rho_f c \sin \alpha \int_0^L \left\{ \left( [(r+x)\dot{\theta} - \dot{v} \sin \alpha]^2 + [\dot{v} \cos \alpha + \dot{h}]^2 \right) (r+x) C_D \right\} dx \quad (2.23)$$

## 2.2 Princípio Extendido de Hamilton

O princípio estendido de Hamilton nos diz que em um dado intervalo de tempo, o balanço entre a variação do Lagrangiano e a variação do trabalho virtual é nulo.

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta W + \delta L] dt = 0 \quad (2.24)$$

Para realizar a integração da equação (2.24) no intervalo  $[t_1, t_2]$  será necessário aplicar uma troca na ordem de integração. Para os termos relacionados a integral no espaço, realizamos inicialmente a integração no tempo, eliminando dessa forma a influência das velocidades virtuais. Utilizaremos integração por partes no termo relacionado à energia potencial da viga de modo que possamos obter  $\delta v$ .

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt &= m_H \dot{h} \delta h \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m_H \ddot{h} \delta h dt + I_H \dot{\theta} \delta \theta \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} I_H \ddot{\theta} \delta \theta dt - \int_{t_1}^{t_2} m_H g \delta h dt \\ &+ \rho A \int_0^l \left[ \dot{\theta} (r+x)^2 \delta \theta \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \dot{v} (r+x) \sin \alpha \delta \theta \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \dot{\theta} (r+x) \sin \alpha \delta v \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \right. \\ &+ \dot{h} \delta h \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \dot{v} \cos \alpha \delta h \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \dot{h} \cos \alpha \delta v \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \dot{v} \delta v \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \dot{\theta} v^2 \sin^2 \alpha \delta \theta \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \Big] dx \\ &+ \rho A \int_0^l \int_{t_1}^{t_2} \left[ -\ddot{\theta} (r+x)^2 \delta \theta + \ddot{v} (r+x) \sin \alpha \delta \theta + \ddot{\theta} (r+x) \sin \alpha \delta v - \ddot{h} \delta h \right. \\ &- \ddot{v} \cos \alpha \delta h - \ddot{h} \cos \alpha \delta v - \ddot{v} \delta v - \ddot{\theta} v^2 \sin^2 \alpha \delta \theta - 2\dot{\theta} \dot{v} v \sin^2 \alpha \delta \theta \\ &+ \dot{\theta}^2 v \sin^2 \alpha \delta v - g(\delta h + \delta v \cos \alpha) - \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{EI}{\rho A} v'' \right) \delta v \Big] dt dx \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left[ -\frac{EI}{\rho A} v'' \delta v' \Big|_{x=0}^{x=l} + \frac{d}{dx} \left( \frac{EI}{\rho A} v'' \right) \delta v \Big|_{x=0}^{x=l} \right] dt \end{aligned} \quad (2.25)$$

Considerando os deslocamentos virtuais nulos nos instantes  $t_1$  e  $t_2$

$$\begin{aligned} \delta \theta(t_1) &= \delta \theta(t_2) = 0, \\ \delta h(t_1) &= \delta h(t_2) = 0, \\ \delta v(t_1, x) &= \delta v(t_2, x) = 0. \end{aligned}$$

e colecionando os termos que multiplicam  $\delta\theta$ ,  $\delta h$  e  $\delta v$ , a equação (2.25) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left( -m_H \ddot{h} - m_H g + \rho A \int_0^l [-\ddot{h} - \ddot{v} \cos \alpha - g] dx \right) \delta h \right. \\
& \left( -I_H \ddot{\theta} + \rho A \int_0^l [-\ddot{\theta}(r+x)^2 + \ddot{v}(r+x) \sin \alpha - \ddot{\theta} v^2 \sin^2 \alpha - 2\dot{\theta} \dot{v} v \sin^2 \alpha] dx \right) \delta \theta \\
& \left. + \rho A \int_0^l \left[ \left( \ddot{\theta}(r+x) \sin \alpha - \ddot{h} \cos \alpha - \ddot{v} + \dot{\theta}^2 v \sin^2 \alpha - g \cos \alpha - \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{EI}{\rho A} v'' \right) \right) \delta v \right] dx \right\} dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left[ -\frac{EI}{\rho A} v'' \delta v' \Big|_{x=0}^{x=l} + \frac{d}{dx} \left( \frac{EI}{\rho A} v'' \right) \delta v \Big|_{x=0}^{x=l} \right] dt
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Dessa forma podemos separar a equação (2.26) em 3 parcelas relacionadas a  $\delta\theta$ ,  $\delta h$  e  $\delta v$ , e então, de posse das equações (2.21), (2.22) e (2.23) podemos substituí-las na equação (2.24), onde o lado direito da igualdade é nulo. Dessa forma, separando as parcelas referentes a  $\delta\theta$ ,  $\delta h$  e  $\delta v$ , como os deslocamentos virtuais são arbitrários, para garantir que cada expressão seja idênticamente nula, necessariamente os termos que multiplicam os deslocamentos virtuais precisam ser nulos. Dessa forma, as equações do movimento tomam a seguinte forma:

- Para a coordenada generalizada  $h$  temos:

$$\begin{aligned}
(m_H + \rho Al) \ddot{h} + (m_H + \rho Al)g + \rho A \int_0^l \ddot{v} \cos \alpha dx = \\
\frac{1}{2} \rho_f c \int_0^L \left\{ \left( [(r+x)\dot{\theta} - \dot{v} \sin \alpha]^2 + [\dot{v} \cos \alpha + \dot{h}]^2 \right) C_L(\alpha) \right\} dx
\end{aligned} \tag{2.27}$$

- Para a coordenada generalizada  $\theta$  temos:

$$\begin{aligned}
\left( I_H + \int_0^l [(r+x)^2 + v^2 \sin^2 \alpha] dx \right) \ddot{\theta} + \rho A \int_0^l [-\ddot{v}(r+x) \sin \alpha + 2\dot{\theta} \dot{v} v \sin^2 \alpha] dx = \\
T - \frac{1}{2} \rho_f c \sin \alpha \int_0^L \left\{ \left( [(r+x)\dot{\theta} - \dot{v} \sin \alpha]^2 + [\dot{v} \cos \alpha + \dot{h}]^2 \right) (r+x) C_D \right\} dx
\end{aligned} \tag{2.28}$$

- Para a coordenada generalizada  $v(x, t)$  temos:

$$\begin{aligned}
-\ddot{\theta}(r+x) \sin \alpha + \ddot{h} \cos \alpha + \ddot{v} - \dot{\theta}^2 v \sin^2 \alpha + g \cos \alpha + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{EI}{\rho A} v'' \right) = \\
\left( [(r+x)\dot{\theta} - \dot{v} \sin \alpha]^2 + [\dot{v} \cos \alpha + \dot{h}]^2 \right) (\rho_f c C_L(\alpha) \cos \alpha + \rho_f c C_D \sin^2 \alpha)
\end{aligned} \tag{2.29}$$



A última parcela implica que

$$-\frac{EI}{\rho A} v'' \delta v' \Big|_{x=0}^{x=l} + \frac{d}{dx} \left( \frac{EI}{\rho A} v'' \right) \delta v \Big|_{x=0}^{x=l} = 0. \quad (2.30)$$

Como a viga é engastada no cilindro, temos a restrição geométrica de que

$$v(0, t) = 0 \quad (2.31)$$

e de que

$$v'(0, t) = 0. \quad (2.32)$$

As restrições acima fazem sentido, pois caso assumíssemos que os deslocamento  $\delta v$  e  $\delta v'$  fossem arbitrários em  $x = 0$ , para que a equação (2.30) seja satisfeita, teríamos que

$$EI v''(0, t) = 0$$

e que

$$\frac{d}{dx} \left( EI v''(0, t) \right) = 0,$$

ou seja, que o momento e a força cortante sejam nulas em  $x = 0$ , o que não é possível em um engastamento.

Na extremidade  $x = l$ , os deslocamento virtuais  $\delta v(l, t)$  e  $\delta v'(l, t) = 0$  são arbitrários, de modo que a equação (2.30) implica que

$$EI v''(l, t) = 0 \quad (2.33)$$

e que

$$\frac{d}{dx} \left( EI v'' \right) \Big|_{x=l} = 0. \quad (2.34)$$

As equações (2.31) e (2.31) são condições geométricas, enquanto (2.33) e (2.34) são as condições de contorno que seguem automaticamente do princípio extendido de Hamilton via equação (2.30).

## 2.3 Equações de Euler-Lagrange

Dada a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_{q_i} \quad (2.35)$$

onde  $q_i$  são as variáveis de interesse ou coordenadas generalizadas. Dessa forma, podemos avaliar esse balanço para cada variável de forma separada, apesar de estarem relacionadas.

- Para a coordenada generalizada  $h$  temos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{h}} \right) - \frac{\partial L}{\partial h} = Q_h \quad (2.36)$$

Calculando as derivadas da Lagrangeana (2.12), e substituindo na equação (2.36), temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial h} = -m_H g - \rho A g \int_0^l dx \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{h}} = m_H \dot{h} + \frac{1}{2} \rho A \int_0^l [2\dot{v} \cos \alpha + 2\dot{h}] dx \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{h}} \right) = m_H \ddot{h} + \rho A \int_0^l [\ddot{v} \cos \alpha + \ddot{h}] dx \end{array} \right. \quad (2.37)$$

e finalmente, combinando (2.21), (2.36) e (2.37), recaímos em (2.27)

$$(m_H + \rho A l) \ddot{h} + (m_H + \rho A l) g + \rho A \int_0^l \ddot{v} \cos \alpha dx = \frac{1}{2} \rho_f c \int_0^L \left\{ \left( [(r+x)\dot{\theta} - \dot{v} \sin \alpha]^2 + [\dot{v} \cos \alpha + \dot{h}]^2 \right) C_L(\alpha) \right\} dx$$

- Para a coordenada generalizada  $\theta$  temos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta \quad (2.38)$$

Calculando as derivadas da Lagrangeana (2.12), e substituindo na equação (2.38), temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_H \dot{\theta} + \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left[ 2\dot{\theta} v^2 \sin^2 \alpha + 2\dot{\theta} (r+x)^2 + 2\dot{v} (r+x) \sin \alpha \right] dx \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = I_H \ddot{\theta} + \rho A \int_0^l \left[ \ddot{\theta} v^2 \sin^2 \alpha + 2\dot{\theta} \dot{v} v \sin^2 \alpha + \ddot{\theta} (r+x)^2 + \ddot{v} (r+x) \sin \alpha \right] dx \end{array} \right. \quad (2.39)$$

e finalmente, combinando (2.23), (2.38) e (2.39), recaímos em (2.28)

$$\left( I_H + \int_0^l [(r+x)^2 + v^2 \sin^2 \alpha] dx \right) \ddot{\theta} + \rho A \int_0^l [-\ddot{v} (r+x) \sin \alpha + 2\dot{\theta} \dot{v} v \sin^2 \alpha] dx = T - \frac{1}{2} \rho_f c \sin \alpha \int_0^L \left\{ \left( [(r+x)\dot{\theta} - \dot{v} \sin \alpha]^2 + [\dot{v} \cos \alpha + \dot{h}]^2 \right) (r+x) C_D \right\} dx$$

- Para a coordenada generalizada  $v(x, t)$  temos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial v} = Q_v \quad (2.40)$$

Calculando as derivadas da Lagrangeana (2.12), que satisfazem a equação de Euler-Lagrange em relação a variável  $v$ , temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left[ 2\dot{\theta}^2 v \sin^2 \alpha - 2g \cos \alpha - 2 \frac{d^2}{dx^2} E I v'' \right] dx \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left[ -2\dot{\theta} (r+x) \sin \alpha + 2\dot{h} \cos \alpha + 2\dot{v} \right] dx \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right) = \rho A \int_0^l \left[ -\ddot{\theta} (r+x) \sin \alpha + \ddot{h} \cos \alpha + \ddot{v} \right] dx \end{array} \right. \quad (2.41)$$

e finalmente, combinando (2.22), (2.40) e (2.41), recaímos em (2.29)

$$-\ddot{\theta} (r+x) \sin \alpha + \ddot{h} \cos \alpha + \ddot{v} - \dot{\theta}^2 v \sin^2 \alpha + g \cos \alpha + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{EI}{\rho A} v'' \right) = \frac{1}{2} \rho_f c \left( [(r+x)\dot{\theta} - \dot{v} \sin \alpha]^2 + [\dot{v} \cos \alpha + \dot{h}]^2 \right) (C_L(\alpha) \cos \alpha + C_D \sin^2 \alpha)$$

## Discretização

Devido da complexidade envolvida no modelo proposto pelo conjunto de Equações Integro-Diferenciais Parciais (2.27), (2.28) e (2.29), decidiu-se verificar numericamente a resposta do mesmo sob certas condições. No entanto, para tal, os operadores de diferenciação e integração devem ser aproximados por operadores discretos equivalentes, que são descritos com detalhes nos apêndices A, B e C.

Para a aproximação das integrais, foi utilizado a quadratura numérica conhecida como Regra Extendida de Simpson. Dada uma função  $F$  no intervalo  $0 < x < L$  a integral pode ser representada por

$$\int_0^l F(x)dx = \sum_{j=1}^N F_j w_j \Delta x \quad (3.1)$$

onde  $w_j$  é a função peso da quadratura e  $\Delta x$  é o passo da malha, dado por  $\frac{l}{N-1}$

Para a aproximação das derivadas espaciais, foram utilizadas duas metodologias distintas, com o intuito de comparar a qualidade de cada um dos métodos para esta classe de problemas. Foi utilizada a metodologia de Diferenças Finitas utilizando 5 pontos e modos assumidos utilizando somente o primeiro modo.

- Diferenças Finitas Centrada (com  $k = 5$  nós) :

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x_j) \approx D_k^n f_j = \sum_{l=m}^{m+k-1} \frac{A_l}{(\Delta x)^n} f(x_j + (l-j)\Delta x), \quad (3.2)$$

- Modos Assumidos (com  $n = 1$  modo):

$$f(x, t) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(x) q_j(t) \quad (3.3)$$

Para a aproximação das derivadas temporais, foi utilizado o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, no entanto, como o método citado resolve apenas equações de 1ª ordem, foi necessário transformar nosso sistema de equações de segunda ordem em um sistema equivalente de primeira ordem, utilizando o espaço de estados. Detalhes da discretização e implementação numérica serão discutidas nas próximas seções, bem como no Apêndice A, B, C e D.

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + h\varphi(x_n, f(x_n); h) \quad (3.4)$$

### 3.1 Diferenças Finitas

Aplicando a Regra Extendida de Simpson (3.1) e Diferenças Finitas (3.2) nas equações do movimento (2.27),(2.28) e (2.29), elas tomam a seguinte forma

- Para a coordenada generalizada  $h$ , temos:

$$m_H \ddot{h} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left\{ \rho_j A_j \left[ 2\ddot{v}_j \cos \alpha + 2\ddot{h} \right] w_j \Delta x \right\} + m_H g + \sum_{j=1}^N \left\{ \rho_j A_j g w_j \Delta x \right\} = \frac{1}{2} \rho_f c \sum_{j=1}^N \left\{ \left[ \dot{\theta}(r + (j-1)\Delta x) - \dot{v}_j \sin \alpha \right]^2 + \left[ \dot{v}_j \cos \alpha + \dot{h} \right]^2 \right\} C_L(\alpha) w_j \Delta x \quad (3.5)$$

- Para a coordenada generalizada  $\theta$ , temos:

$$I_H \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left\{ \rho_j A_j \left[ 2\ddot{\theta}(r + (j-1)\Delta x)^2 - 2(r + (j-1)\Delta x)\ddot{v}_j \sin \alpha + 2v_j^2 \sin^2 \alpha \ddot{\theta} + 4v_j \dot{v}_j \sin^2 \alpha \dot{\theta} \right] w_j \Delta x \right\} = -\frac{1}{2} \rho_f c \sum_{j=1}^N \left\{ \left[ \dot{\theta}(r + (j-1)\Delta x) - \dot{v}_j \sin \alpha \right]^2 + \left[ \dot{v}_j \cos \alpha + \dot{h} \right]^2 \right\} (r + (j-1)\Delta x) \sin \alpha C_D w_j \Delta x + T \quad (3.6)$$

- Para a coordenada generalizada  $v_l(x, t)$ , temos:

$$-\ddot{\theta}(r + (l-1)\Delta x) \sin \alpha + \ddot{v}_l + \cos \alpha \ddot{h} - v_l \sin^2 \alpha \dot{\theta}^2 + g \cos \alpha - \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\rho_j A_j}{\rho_l A_l} \left[ - \left( \frac{EI}{\rho A} \right)_j \frac{\partial}{\partial v_l} (D_k^4 v_j) \right] \frac{w_j}{w_l} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\rho_f c}{\rho_l A_l} \left\{ \left[ \dot{\theta}(r + (l-1)\Delta x) - \dot{v}_l \sin \alpha \right]^2 + \left[ \dot{v}_l \cos \alpha + \dot{h} \right]^2 \right\} C_L(\alpha) \cos \alpha + \frac{1}{2} \frac{\rho_f c}{\rho_l A_l} \left\{ \left[ \dot{\theta}(r + (l-1)\Delta x) - \dot{v}_l \sin \alpha \right]^2 + \left[ \dot{v}_l \cos \alpha + \dot{h} \right]^2 \right\} C_D(\alpha) \sin^2 \alpha$$

com  $l = 2, \dots, N$

(3.7)

Dessa forma, transformamos nosso conjunto de 3 Equações Integro-Diferenciais Parciais em um conjunto de N+1 Equações Diferenciais Ordinárias. Detalhes de como as condições de contorno (2.31), (2.32), (2.33) e (2.34) foram incorporadas no problema podem ser verificados no Apêndice B.

Devido a quantidade arbitrária de EDO's que podemos utilizar na solução o problema, conforme aumentamos a discretização, é conveniente representa-las na forma

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{v}_2 \\ \dots \\ \ddot{v}_{N-1} \\ \ddot{v}_N \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} h \\ \theta \\ v_2 \\ \dots \\ v_{N-1} \\ v_N \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_h \\ F_\theta \\ F_2 \\ \dots \\ F_{N-1} \\ F_N \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.8)$$

onde  $[M]$  é a matriz de massa do sistema,  $[K]$  a matriz de rigidez e  $\{F\}$  o vetor de forças que possui todas os termos não lineares. Então, os elementos não nulos das matrizes  $[M]$ ,  $[K]$  e  $\{F\}$  são

- Matriz de Massa  $[M]$

$$M_{1,1} = m_H + m_v \quad (3.9)$$

$$M_{1,j+1} = \rho_j A_j w_j \Delta x \cos \alpha; \quad j = 2, \dots, N \quad (3.10)$$

$$M_{2,2} = I_H + \sum_{j=1}^N \rho_j A_j (r + (j-1)\Delta x)^2 w_j \Delta x + \sum_{j=1}^N \rho_j A_j v_j^2 \sin^2 \alpha w_j \Delta x \quad (3.11)$$

$$M_{2,j+1} = -\rho_j A_j (r + (j-1)\Delta x) \sin \alpha w_j \Delta x; \quad j = 2, \dots, N \quad (3.12)$$

$$M_{j+1,1} = \rho_j A_j \cos \alpha w_j \Delta x; \quad j = 2, \dots, N \quad (3.13)$$

$$M_{j+1,2} = -\rho_j A_j (r + (j-1)\Delta x) \sin \alpha w_j \Delta x; \quad j = 2, \dots, N \quad (3.14)$$

$$M_{j+1,j+1} = \rho_j A_j w_j \Delta x; \quad j = 2, \dots, N. \quad (3.15)$$

- Matriz de Rigidez  $[K]$

$$K_{i+1,j+1} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial v_n} (D_k^A v_m) (EI)_j w_j \Delta x; \quad m, n = 2, \dots, N, \quad (3.16)$$

- Vetor de Forças  $\{F\}$

$$F_h = m_H g + m_v g - \frac{1}{2} \rho_f c \sum_{j=1}^N \left\{ \left[ \dot{\theta}(r + (j-1)\Delta x) - \dot{v}_j \sin \alpha \right]^2 + \left[ \dot{v}_j \cos \alpha + \dot{h} \right]^2 \right\} C_L(\alpha) w_j \Delta x \quad (3.17)$$

$$F_\theta = \sum_{j=1}^N \{ 2\rho_j A_j w_j v_j \dot{v}_j \} \sin^2 \alpha \dot{\theta} \Delta x + \frac{1}{2} \rho_f c \sum_{j=1}^N \left\{ \left[ \dot{\theta}(r + (j-1)\Delta x) - \dot{v}_j \sin \alpha \right]^2 + \left[ \dot{v}_j \cos \alpha + \dot{h} \right]^2 \right\} (r + (j-1)\Delta x) \sin \alpha C_D w_j \Delta x - T \quad (3.18)$$

$$F_l = -\rho_l A_l w_l \Delta x \left[ v_l \sin^2 \alpha \dot{\theta}^2 - g \cos \alpha \right] - \frac{1}{2} \rho_f c \left\{ \left[ \dot{\theta}(r + (l-1)\Delta x) - \dot{v}_l \sin \alpha \right]^2 + \left[ \dot{v}_l \cos \alpha + \dot{h} \right]^2 \right\} (C_L(\alpha) \cos \alpha + C_D \sin^2 \alpha) w_l \Delta x; \quad l = 2, \dots, N \quad (3.19)$$



## 3.2 Modos Assumidos

Dada a forma geral (3.1), podemos definir o produto entre 2 modos ortogonais como

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Phi_i \Phi_j = 0 \quad (3.20)$$

mas como utilizaremos  $n = 1$ , ou seja, apenas o primeiro modo normal, então  $i = j$  e podemos negligenciar o somatório pois

$$\sum_{j=1}^1 \Phi_j = \Phi_j \quad (3.21)$$

ou ainda, utilizando (3.21) em (3.20), temos que

$$\sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^1 \Phi_i \Phi_j = \Phi_i \Phi_j = \Phi_j^2 \quad (3.22)$$

que pode ser estendido para o caso  $\Phi_j^n$

Aplicando o Método dos Modos Assumidos (3.3) nas equações do movimento (2.27),(2.28) e (2.29), elas tomam a seguinte forma

- Para a coordenada generalizada  $h$ , temos:

$$\begin{aligned} (m_H + \rho Al) \ddot{h} + (m_H + \rho Al)g + \rho A \int_0^l \ddot{q} \Phi_j \cos \alpha dx = \\ \frac{1}{2} \rho_f c \int_0^L \left\{ \left( [(r+x)\Phi_j \dot{\theta} - \dot{q} \Phi_j \sin \alpha]^2 + [\dot{q} \Phi_j \cos \alpha + \dot{h}]^2 \right) C_L(\alpha) \right\} dx \end{aligned} \quad (3.23)$$

- Para a coordenada generalizada  $\theta$ , temos:

$$\begin{aligned} \left( I_H + \int_0^l [(r+x)^2 \Phi_j^2 + q^2 \Phi_j^2 \sin^2 \alpha] dx \right) \ddot{\theta} \\ + \rho A \int_0^l \left[ -\ddot{q} \Phi_j (r+x) \Phi_j \sin \alpha + 2\dot{\theta} \dot{q} \Phi_j q \Phi_j \sin^2 \alpha \right] dx = \\ T - \frac{1}{2} \rho_f c \sin \alpha \int_0^L \left\{ \left( [(r+x)\Phi_j \dot{\theta} - \dot{q} \Phi_j \sin \alpha]^2 + [\dot{q} \Phi_j \cos \alpha + \dot{h}]^2 \right) (r+x) \Phi_j C_D \right\} dx \end{aligned} \quad (3.24)$$

- Para a coordenada generalizada  $v(x, t)$ , temos:

$$\begin{aligned} & \rho A \int_0^l \left[ -\ddot{\theta}(r+x)\Phi_j \sin \alpha + \ddot{h} \cos \alpha + \ddot{q}\Phi_j - \dot{\theta}^2 q \Phi_j \sin^2 \alpha + g \cos \alpha + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{EI}{\rho A} v'' \right) \right] dx = \\ & \frac{1}{2} \rho_f c \int_0^l \left( [(r+x)\Phi_j \dot{\theta} - \dot{q}\Phi_j \sin \alpha]^2 + [\dot{q}\Phi_j \cos \alpha + \dot{h}]^2 \right) (C_L(\alpha) \cos \alpha + C_D \sin^2 \alpha) dx \end{aligned} \quad (3.25)$$

Para realizar a compatibilidade entre as equações, é necessário ainda multiplicar (3.25) por um modo ortogonal. Dessa forma, expandindo os termos quadráticos, utilizando relações trigonométricas, separando cada integral e colocando as constantes para fora, podemos reescrever as equações (3.23), (3.24) e (3.25) como

- Para a coordenada generalizada  $h$ , temos:

$$\begin{aligned} & (m_H + \rho Al) \ddot{h} + (m_H + \rho Al)g + \rho A \ddot{q} \cos \alpha \int_0^l \Phi_j dx = \\ & \frac{1}{2} \rho_f c \left[ \dot{\theta}^2 \int_0^l (r+x)^2 \Phi_j^2 dx + \dot{q}^2 \int_0^l \Phi_j^2 dx - 2\dot{\theta}\dot{q} \sin \alpha \int_0^l (r+x)\Phi_j^2 dx \right. \\ & \left. + \dot{h}^2 + 2\dot{q} \cos^2 \alpha \dot{h} \int_0^l \Phi_j dx \right] C_l(\alpha) \end{aligned} \quad (3.26)$$

- Para a coordenada generalizada  $\theta$ , temos:

$$\begin{aligned} & \left( I_H + \int_0^l (r+x)^2 \Phi_j^2 dx + q^2 \sin^2 \alpha \int_0^l \Phi_j^2 dx \right) \ddot{\theta} \\ & - \rho A \ddot{q} \sin \alpha \int_0^l (r+x)\Phi_j dx + 2\rho A \dot{\theta} \dot{q} q \sin^2 \alpha \int_0^l \Phi_j^2 dx = \\ & T - \frac{1}{2} \rho_f c \left[ \dot{\theta}^2 \int_0^l (r+x)^3 \Phi_j^3 dx + \dot{q}^2 \int_0^l (r+x)\Phi_j^3 dx - 2\dot{\theta}\dot{q} \sin \alpha \int_0^l (r+x)^2 \Phi_j^3 dx \right. \\ & \left. + \dot{h}^2 \int_0^l (r+x)\Phi_j dx + 2\dot{q} \cos^2 \alpha \dot{h} \int_0^l (r+x)\Phi_j^2 dx \right] C_D(\alpha) \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.27)$$

- Para a coordenada generalizada  $v_l(x, t)$ , temos:

$$\begin{aligned}
& -\rho A \ddot{\theta} \sin \alpha \int_0^l (r+x) \Phi_j^2 dx + \rho A \ddot{h} \cos \alpha \int_0^l \Phi_j dx + \rho A \ddot{q} \int_0^l \Phi_j^2 dx \\
& + \rho A \dot{\theta}^2 q \sin^2 \alpha \int_0^l \Phi_j^2 dx + g \cos \alpha \int_0^l \Phi_j dx + \rho A q a_j^4 \frac{EI}{\rho A} \int_0^l \Phi_j dx = \\
& \frac{1}{2} \rho_f c \left[ \dot{\theta}^2 \int_0^l (r+x)^2 \Phi_j^3 dx + \dot{q}^2 \int_0^l \Phi_j^3 dx - 2\dot{\theta}\dot{q} \sin \alpha \int_0^l (r+x) \Phi_j^3 dx \right. \\
& \left. + \dot{h}^2 \int_0^l \Phi_j dx + 2\dot{q} \cos^2 \alpha \dot{h} \int_0^l \Phi_j^2 dx \right] (C_L(\alpha) \cos \alpha + C_D \sin^2 \alpha)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Dessa forma, transformamos nosso conjunto de 3 Equações Integro-Diferenciais Parciais para um conjunto de 3 Equações Diferenciais Parciais. Detalhes a cerca das integrais e de como as condições de contorno (2.31), (2.32), (2.33) e (2.34) foram incorporadas no problema podem ser verificados no Apêndice C.

Escrevendo o sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} M_{11} & 0 & M_{13} \\ 0 & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \\ q \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_h \\ F_\theta \\ F_q \end{Bmatrix} = 0 \tag{3.29}$$

onde  $[M]$  é a matriz de massa do sistema,  $[K]$  a matriz de rigidez e  $\{F\}$  o vetor de forças que possui todas os termos não lineares. Então, os elementos não nulos das matrizes  $[M]$ ,  $[K]$  e  $\{F\}$  são

- Matriz de Massa [ $M$ ]

$$M_{1,1} = m_H + m_v \quad (3.30)$$

$$M_{1,3} = \int_1^L \rho_j A_j \Phi \cos \alpha w_j \Delta x \quad (3.31)$$

$$M_{2,2} = I_H + \int_1^L \rho_j A_j (r + (j-1)\Delta x)^2 \Phi^2 w_j \Delta x + \int_1^L \rho_j A_j q_j^2 \Phi^2 \sin^2 \alpha w_j \Delta x \quad (3.32)$$

$$M_{2,3} = - \int_1^L \rho_j A_j (r + (j-1)\Delta x)^2 \Phi^2 \sin \alpha w_j \Delta x \quad (3.33)$$

$$M_{3,1} = \int_1^L \rho_j A_j \Phi \cos \alpha w_j \Delta x \quad (3.34)$$

$$M_{3,2} = - \int_1^L \rho_j A_j (r + (j-1)\Delta x)^2 \Phi^2 \sin \alpha w_j \Delta x \quad (3.35)$$

$$M_{3,3} = \int_1^L \rho_j A_j \Phi^2 w_j \Delta x \quad (3.36)$$

- Matriz de Rigidez [ $K$ ]

$$K_{3,3} = \int_1^L \rho_j a_1^4 A_j \Phi \quad (3.37)$$

onde  $a_1$  é a frequência natural da viga engastada livre, como descrito no Apêndice C

- Vetor de Forças  $\{F\}$

$$\begin{aligned}
F_h &= m_H g + m_v g \\
&\quad - \frac{1}{2} \rho_f c \int_1^L \left\{ \dot{\theta}^2 (r + (j-1)\Delta x)^2 \Phi^2 - 2\dot{\theta}\dot{q} \sin \alpha (r + (j-1)\Delta x) \Phi^2 + \dot{q}_j^2 \Phi^2 \right. \\
&\quad \left. + 2\dot{q}\dot{h} \cos \alpha \Phi + \dot{h}^2 \right\} C_L(\alpha) w_j \Delta x
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
F_\theta &= \int_1^L \{ 2\rho_j A_j w_j q_j \dot{q}_j \} \sin^2 \alpha \dot{\theta} \Delta x \\
&\quad + \frac{1}{2} \rho_f c \int_1^L \left\{ \dot{\theta}^2 (r + (j-1)\Delta x)^3 \Phi^3 - 2\dot{\theta}\dot{q} \sin \alpha (r + (j-1)\Delta x)^2 \Phi^3 + \dot{q}_j^2 (r + (j-1)\Delta x)^3 \right. \\
&\quad \left. + 2\dot{q}\dot{h} \cos \alpha (r + (j-1)\Delta x) \Phi^2 + \dot{h}^2 (r + (j-1)\Delta x) \Phi \right\} \sin \alpha C_D(\alpha) w_j \Delta x - T
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
F_l &= - \int_1^L \rho_j A_j \left[ q \sin^2 \alpha \dot{\theta}^2 \Phi^2 - g \cos \alpha \Phi \right] w_j \Delta x \\
&\quad - \frac{1}{2} \rho_f c \int_1^L \left\{ \dot{\theta}^2 (r + (j-1)\Delta x)^2 \Phi^3 - 2\dot{\theta}\dot{q} \sin \alpha (r + (j-1)\Delta x) \Phi^3 + \dot{q}_j^2 \Phi^3 + \right. \\
&\quad \left. 2\dot{q}\dot{h} \cos \alpha \Phi^2 + \dot{h}^2 \Phi \right\} (C_L(\alpha) \cos \alpha + C_D(\alpha) \sin^2 \alpha) w_j \Delta x
\end{aligned} \tag{3.40}$$

### 3.3 Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta de 4 Ordem Explícito é um método largamente utilizado na solução de problemas de valor inicial, porém, como ele é um método que faz aproximações de derivadas de 1 ordem.

Como estamos lidando com um conjunto de equações diferenciais parciais de 2 ordem, e as derivadas temporais de segunda ordem todas as variáveis de estado aparecem em todas as equações, temos então um sistema acoplado. Dessa forma, foi necessário realizar uma transformação para que o sistema original seja tratado por EDO's de 1 ordem desacopladas.

#### 3.3.1 Desacoplando o Sistema

Como a representação das variáveis de estado depende da discretização utilizada, vamos introduzir uma notação utilizando variáveis generalizadas. Dessa forma, (3.8) e (3.29) podem ser reescritas como

$$\begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{j1} & \cdots & M_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \vdots \\ \ddot{s}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{j1} & \cdots & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_j \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.41)$$

onde  $j$  representa o número de estados presentes,  $[M]_{j,j}$  e  $[K]_{j,j}$  representam respectivamente as matrizes de massa e rigidez do sistema,  $\ddot{s}_1, \dots, \ddot{s}_j$  representam a segunda derivada temporal de cada estado generalizado (ou ainda, um vetor de “aceleração generalizada”),  $s_1, \dots, s_j$  representam cada estado generalizado (analogamente, um vetor de “posição generalizada”) e  $\{F\}_j$  é o vetor de forças generalizado.

Para desacoplar o sistema, devemos então isolar o vetor  $\vec{\ddot{s}}$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \vdots \\ \ddot{s}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{j1} & \cdots & M_{jj} \end{bmatrix}^{-1} \left( - \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{j1} & \cdots & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_j \end{Bmatrix} \right) \quad (3.42)$$

### 3.3.2 Forma de Estados

Podemos representar (3.41) em termos de vetores mais completos, através da seguinte representação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & \cdots & 0 & M_{1j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & M_{j1} & \cdots & 0 & M_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \ddot{s}_1 \\ \vdots \\ \dot{s}_j \\ \ddot{s}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ K_{11} & 0 & \cdots & K_{1j} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ K_{j1} & 0 & \cdots & K_{jj} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1 \\ \dot{s}_1 \\ \vdots \\ s_j \\ \dot{s}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_1 \\ \vdots \\ 0 \\ F_j \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.43)$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2j-1} \\ x_{2j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_1 \\ \dot{s}_1 \\ \vdots \\ s_j \\ \dot{s}_j \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

podemos derivar (3.43)

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{2j-1} \\ \dot{x}_{2j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \ddot{s}_1 \\ \vdots \\ \dot{s}_j \\ \ddot{s}_j \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

e combinando (3.43), (3.44) e (3.45), podemos escrever (3.42).

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{2j-1} \\ \dot{x}_{2j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & \cdots & 0 & M_{1j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & M_{j1} & \cdots & 0 & M_{jj} \end{bmatrix}^{-1} \left( - \begin{bmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ K_{11} & 0 & \cdots & K_{1j} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ K_{j1} & 0 & \cdots & K_{jj} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2j-1} \\ x_{2j} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ F_1 \\ \vdots \\ 0 \\ F_j \end{Bmatrix} \right) \quad (3.46)$$

Dessa forma, o sistema de  $j$  equações diferenciais de 2 ordem foi reduzido a um sistema de  $2j$  equações diferenciais de 1, sendo possível aplicar o método de Runge-Kutta para aproximar as derivadas de 1 ordem.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{2j-1} \\ \dot{x}_{2j} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & \cdots & 0 & M_{1j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & M_{j1} & \cdots & 0 & M_{jj} \end{bmatrix}^{-1} \left( - \begin{bmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ K_{11} & 0 & \cdots & K_{1j} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ K_{j1} & 0 & \cdots & K_{jj} & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{x_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ F_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ F_j & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2j-1} \\ x_{2j} \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

ou, finalmente

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{2j-1} \\ \dot{x}_{2j} \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & \cdots & 0 & M_{1j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & M_{j1} & \cdots & 0 & M_{jj} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ K_{11} - \frac{F_1}{x_1} & 0 & \cdots & K_{1j} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ K_{j1} - \frac{F_1}{x_1} & 0 & \cdots & K_{jj} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2j-1} \\ x_{2j} \end{pmatrix}$$

Podemos então representar o sistema da forma

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \quad (3.48)$$

onde

$$A = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & \cdots & 0 & M_{1j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & M_{j1} & \cdots & 0 & M_{jj} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ K_{11} - \frac{F_1}{x_1} & 0 & \cdots & K_{1j} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ K_{j1} - \frac{F_1}{x_1} & 0 & \cdots & K_{jj} & 0 \end{bmatrix}$$



## Projeto do Controlador

Com o objetivo de controlar a resposta do sistema, foi projetada uma lei de controle para realimentar o sistema de forma dinâmica. Utilizando a notação generalizada do capítulo 3.3, podemos representar o sistema submetido a uma lei de controle como

$$\dot{\vec{s}} = A\vec{s} + B\vec{u} \quad (4.1)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & & 0 & M_{1j} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & M_{j1} & & 0 & M_{jj} \end{bmatrix}^{-1} \left( - \begin{bmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ K_{11} - \frac{F_1}{s_1} & 0 & \cdots & K_{1j} & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ K_{j1} - \frac{F_1}{s_1} & 0 & \cdots & K_{jj} & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (4.2)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & M_{11} & 0 & M_{12} & 0 & M_{13} & & 0 & M_{1j} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & & 1 & 0 \\ & & & & & & \cdots & & \\ 0 & M_{21} & 0 & M_{22} & 0 & M_{23} & & 0 & M_{2j} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & M_{31} & 0 & M_{32} & 0 & M_{33} & & 0 & M_{3j} \\ & & \vdots & & & & \ddots & \vdots & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & M_{j1} & 0 & M_{j2} & 0 & M_{j3} & & 0 & M_{jj} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

A lei de controle  $\vec{u}$  foi projetada a partir do método SDRE, onde

$$u = -R^{-1}(s)B^T(s)Ps \quad (4.5)$$

as matrizes  $P$  e  $Q$  são os ganhos do controlador e a matriz  $P$  é obtida através da solução da equação de Ricatti

$$P(s)A(s) + A^T(s)P(s) + Q(s) - P(s)B(s)R^{-1}(s)B^T(s)P(s) = 0 \quad (4.6)$$

O controle foi projetado para levar o sistema para uma altitude e um ângulo de referência pré-determinado, dessa forma, o controle atua somente sobre as variáveis  $h$  e  $\theta$ .

Utilizando os seguintes parâmetros de simulação

Parâmetro	Valor	Unidade
Constantes da Estrutura		
I	$1,2358 \cdot 10^{-10}$	$m^4$
E	$2,1 \cdot 10^{11}$	Pa
g	9,81	$m/s^2$
$\rho$	7860	$Kg/m^3$
A	$9,7500 \cdot 10^{-5}$	$m^2$
L	1	m
r	0.1	m
Constantes do Fluido		
$\rho_f$	1.184	$Kg/m^3$
c	0.025	m
$C_L$	$2\pi\alpha$	-
$C_D$	$1.28\sin\alpha$	-
Diferenças Finitas		
N	12	-
Modos Assumidos		
$a_1$	1,8780	-
Runge-Kutta		
n	100000	-
t	10	s

e as seguintes condições iniciais

Parâmetro	Valor	Unidade
Condições Iniciais		
$h$	0	$m$
$\dot{h}$	0	$m/s$
$\theta$	100	
$\dot{\theta}$	0	$rad/s$
$v(x)$	$-0.0630 \cos\alpha$	$m$
$\dot{v}(x)$	0	$m/s$

onde  $v(x) = \frac{g \cos \alpha \rho A}{EI} \left( -\frac{L^2}{4}x^2 + \frac{L}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 \right)$ , foram realizadas simulações comparando a resposta do sistema frente a diferentes valores de ganho, velocidades de referencia e angulos de ataque. Os ganhos utilizados para o controlador foram obtidos a partir de diversas simulações, buscando uma resposta eficiente e fisicamente coerente.

## 4.1 Resposta do Sistema para Diferentes Valores de Ganho

Para avaliar o efeito do ganho na dinamica do sistema, foi fixada uma velocidade de referência de 50rad/s, um angulo de ataque de 5° e uma matriz de ganho R

$$R = 200 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

e então realizadas simulações para 2 conjuntos de ganhos Q diferentes.

$$Q_1 = 100 \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2500 & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 2500 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

e

$$Q_2 = 1000 \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25000 & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 25000 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Os gráficos apresentados a seguir referem-se a simulação da resposta do sistema, sob efeito da lei de controle  $u$ .

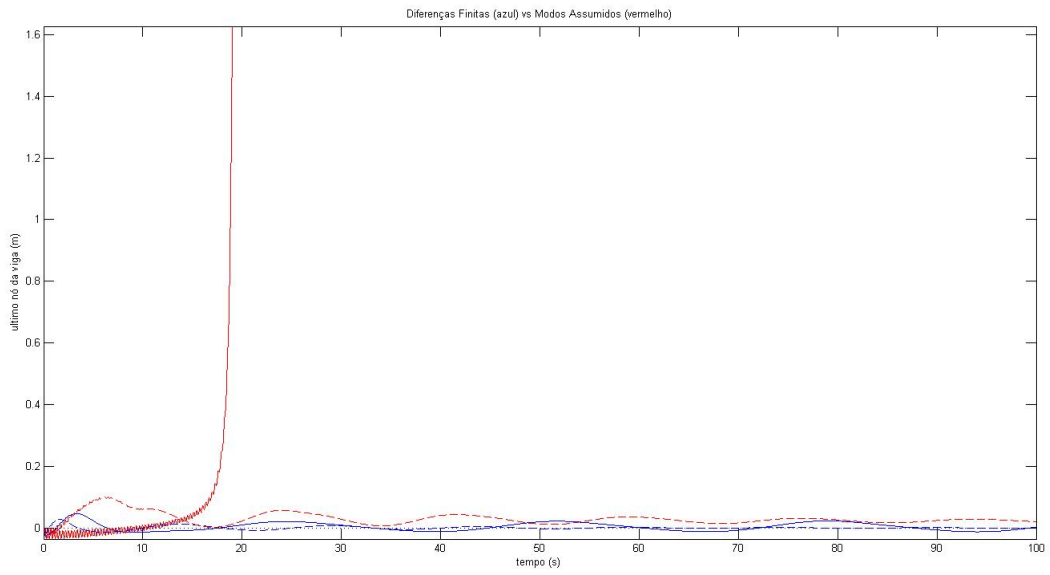


Figura 4.1: Resposta do último nó para  $\alpha = 5$  - Q1(contínuo) vs Q2(tracejado)

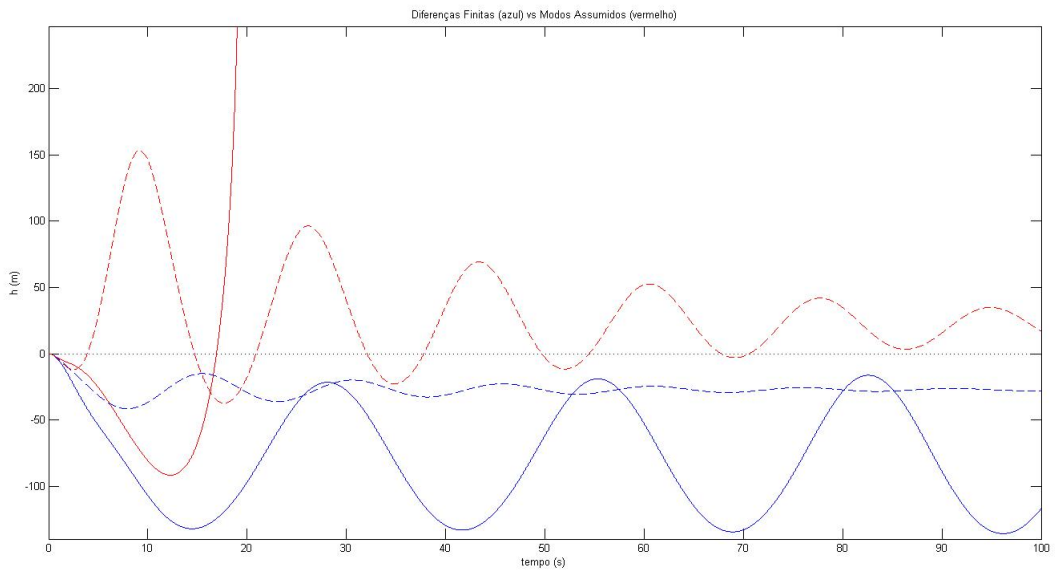


Figura 4.2: Resposta de  $h$  para  $\alpha = 5$  - Q1(contínuo) vs Q2(tracejado)

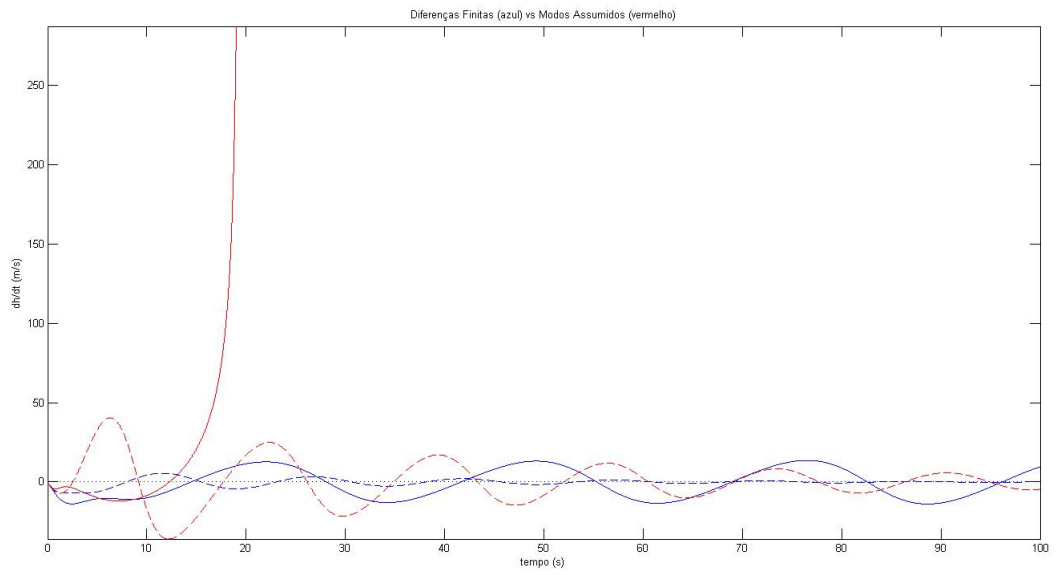


Figura 4.3: Resposta de  $\dot{h}$  para  $\alpha = 5$  - Q1(contínuo) vs Q2(tracejado)

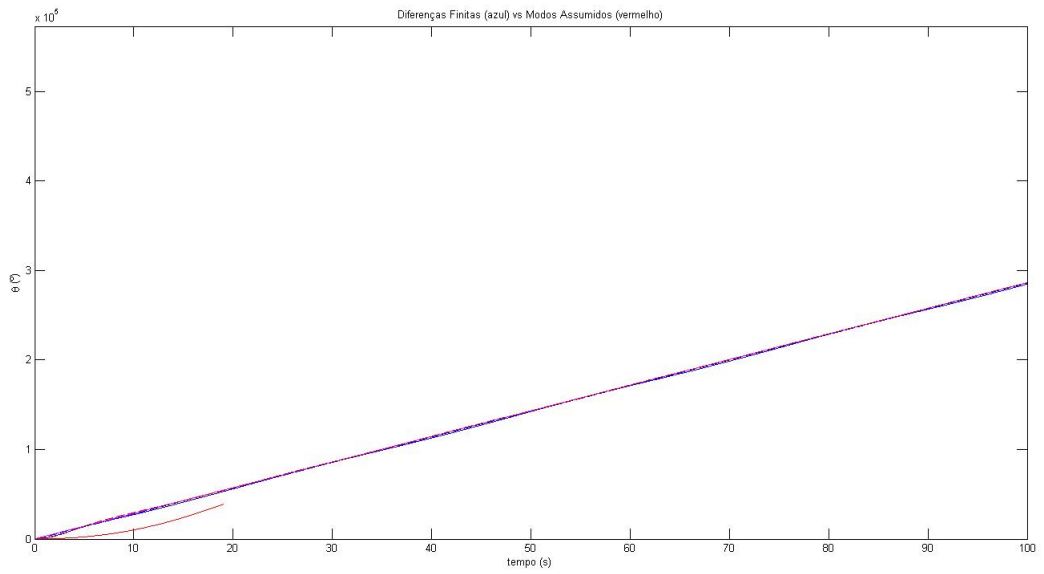


Figura 4.4: Resposta de  $\theta$  para  $\alpha = 5$  - Q1(contínuo) vs Q2(tracejado)

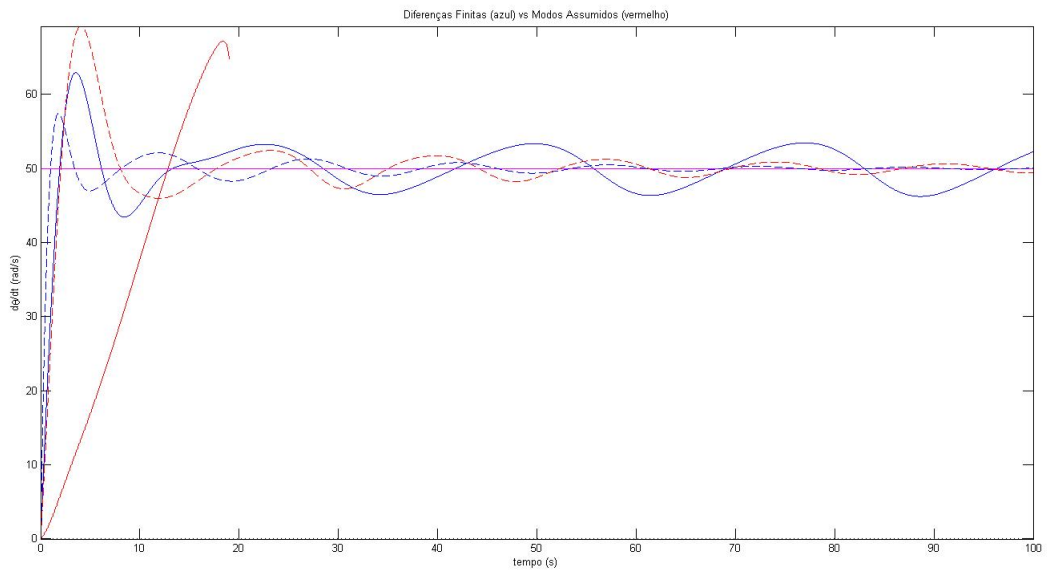


Figura 4.5: Resposta de  $\dot{\theta}$  para  $\alpha = 5$  - Q1(contínuo) vs Q2(tracejado)

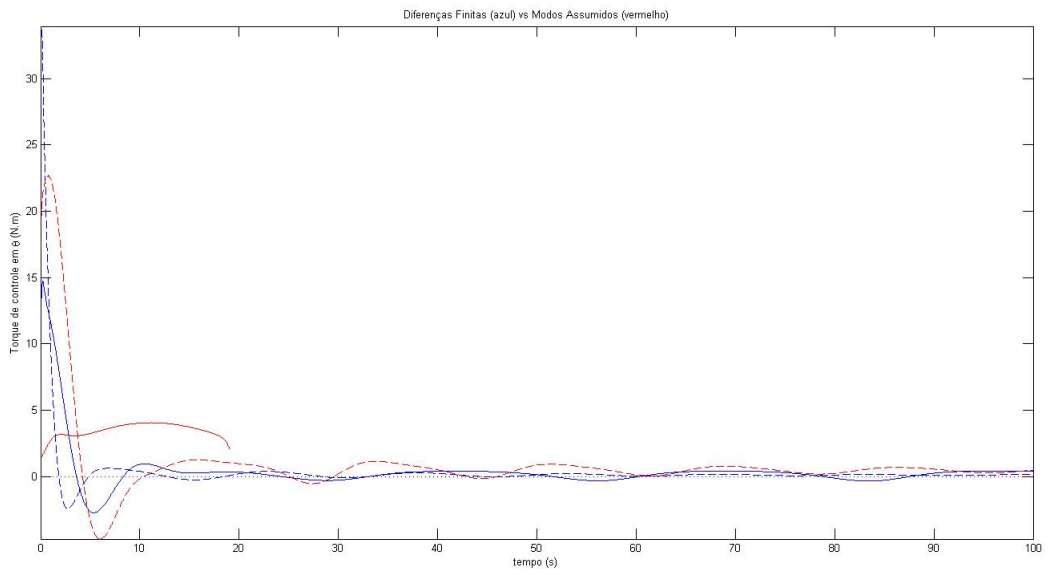


Figura 4.6: Força de controle em  $\theta$  para  $\alpha = 5$  - Q1(contínuo) vs Q2(tracejado)

Dos gráficos apresentados podemos notar que, enquanto o sistema converge para os ganhos  $Q_2$ , para os ganhos  $Q_1$ , apesar de lenta, temos divergência. Além disso, msm analisando apenas um conjunto de ganhos é possível notar uma diferença expressiva entre as respostas por cada uma das técnicas de discretização.

Analisando a resposta com  $Q_1$ , enquanto o método de diferenças finitas mostra uma divergência extremamente lenta, podendo ser tratada quase como estabilidade marginal, o método de modos assumidos diverge rapidamente e de forma bastante abrupta. Já com relação a resposta com  $Q_2$ , mesmo as duas soluções convergindo, podemos notar que a convergencia é muito mais rápida e eficiente para a discretização via diferenças finitas, pois a aproximação via modos assumidos é muito sensível ao efeito das não-linearidades. Podemos concluir que mesmo que os ganhos projetados a partir da abordagem via modos assumidos sejam satisfatórios, eles serão super-estimados e não representariam uma solução otimizada.



## 4.2 Resposta do Sistema para Diferentes Valores de Velocidade e Ângulo de Ataque

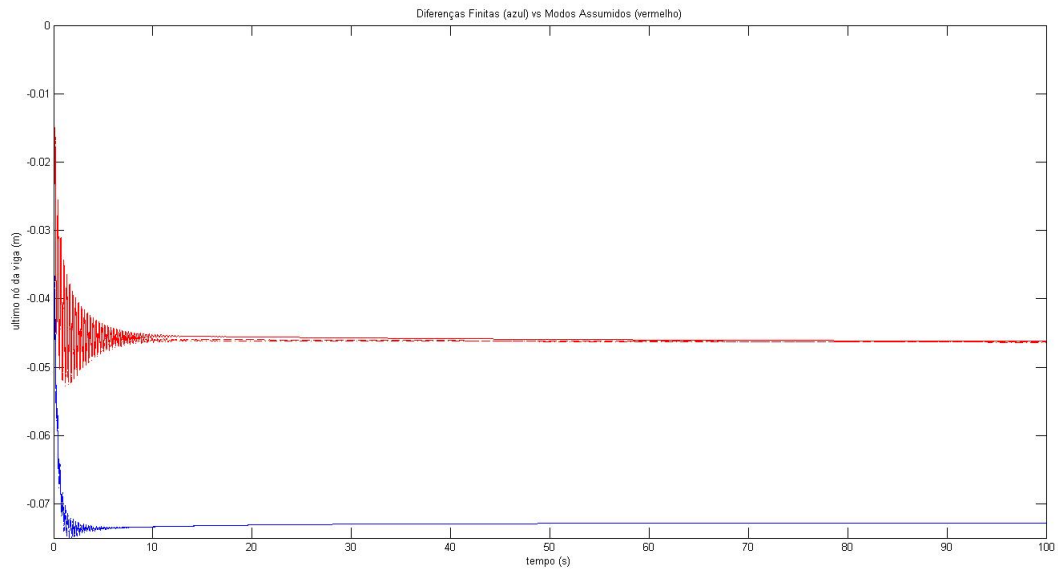


Figura 4.7: Resposta do último nó para  $\alpha = 0 - 50$ rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(traço-ponto)

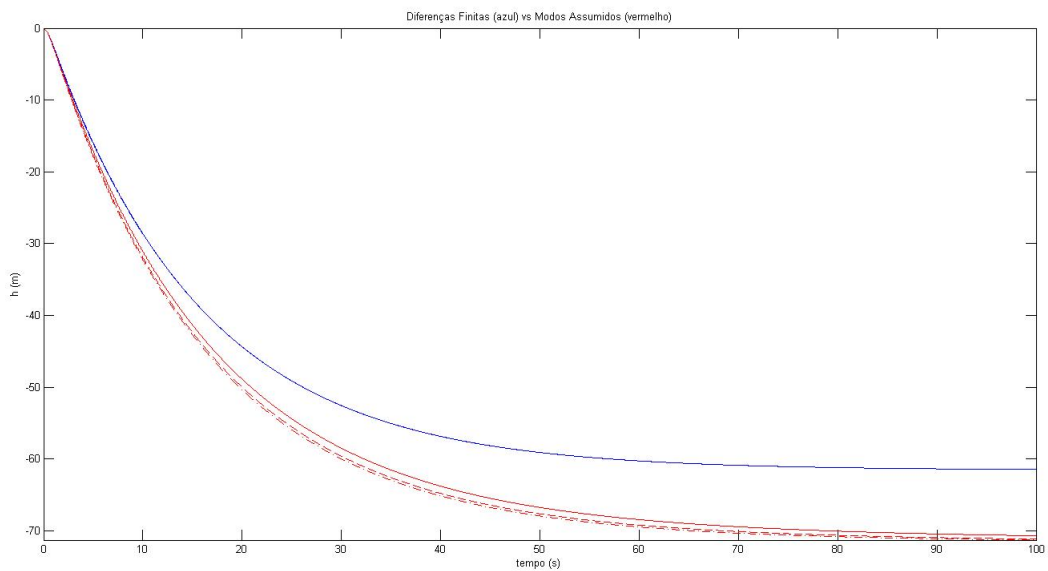


Figura 4.8: Resposta de  $h$  para  $\alpha = 0 - 50$ rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(traço-ponto)

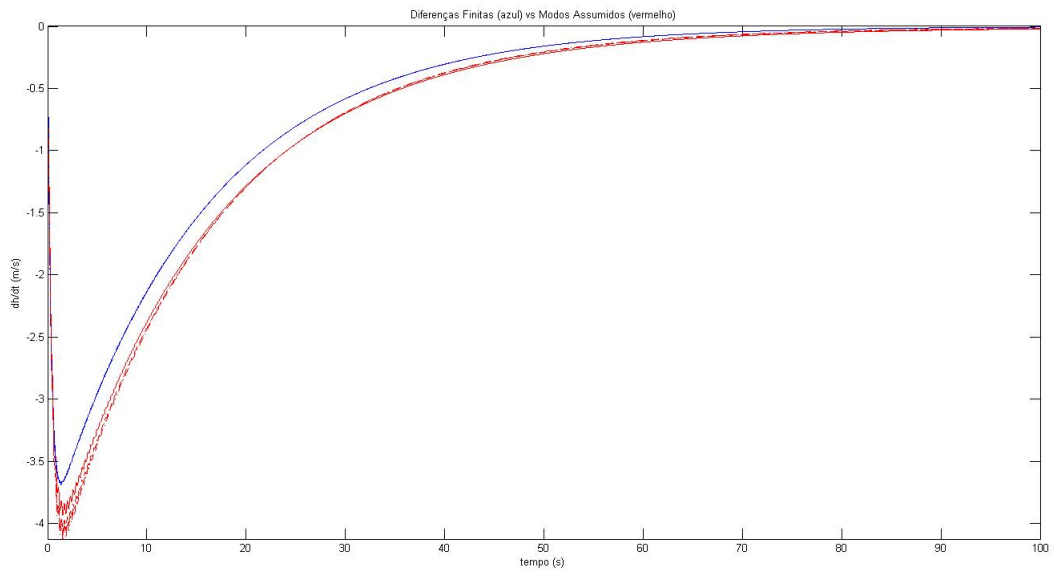


Figura 4.9: Resposta de  $\dot{h}$  para  $\alpha = 0 - 50$ rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(traço-ponto)

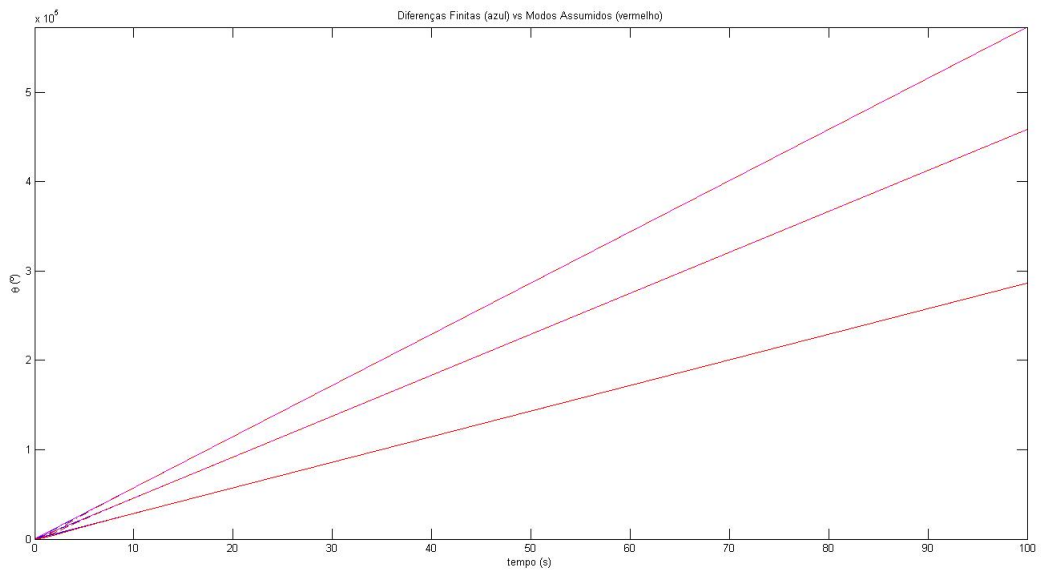


Figura 4.10: Resposta de  $\theta$  para  $\alpha = 0 - 50$ rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(traço-ponto)

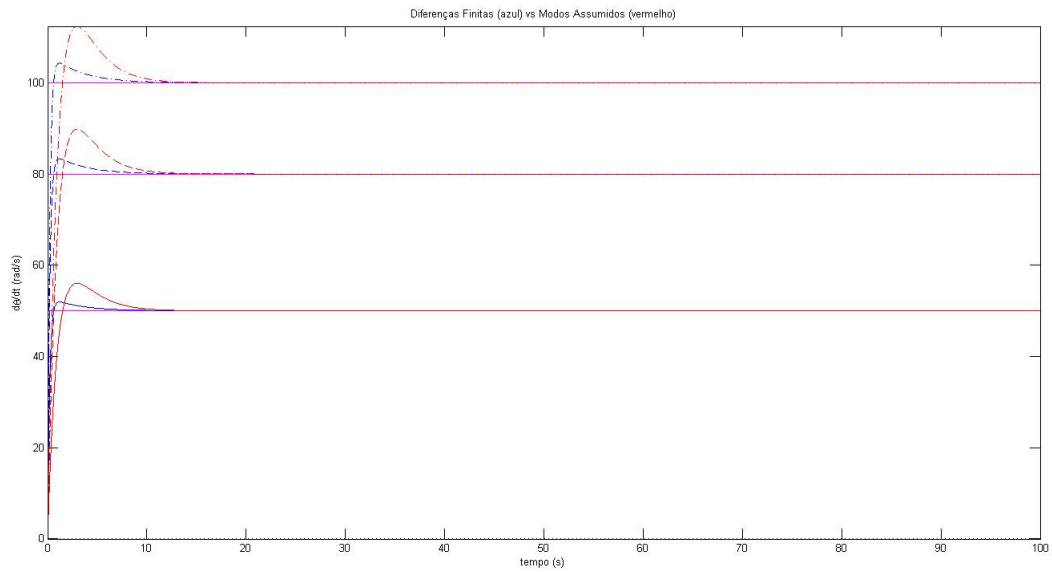


Figura 4.11: Resposta de  $\dot{\theta}$  para  $\alpha = 0 - 50\text{rad/s}$ (contínuo) vs  $80\text{rad/s}$ (tracejado) vs  $100\text{rad/s}$ (traço-ponto)

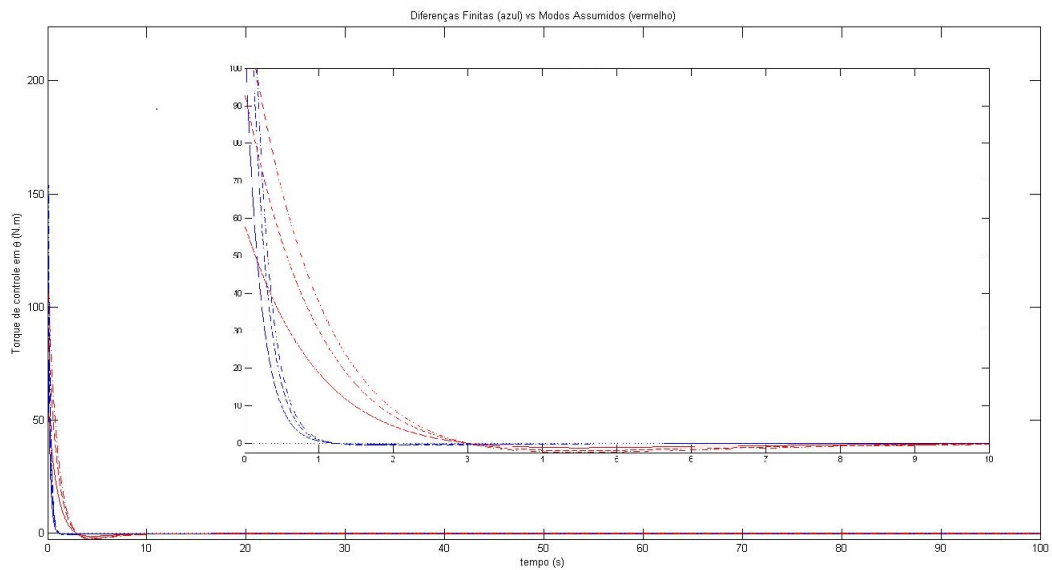


Figura 4.12: Força de controle em  $\theta$  para  $\alpha = 0 - 50\text{rad/s}$ (contínuo) vs  $80\text{rad/s}$ (tracejado) vs  $100\text{rad/s}$ (traço-ponto)

Para o caso  $\alpha = 0$ , podemos notar que para cada método de discretização, as respostas em altitude e vibração coincidem independente da velocidade, pois os efeitos do fluido são nulos para sustentação. Os efeitos da sustentação e arrasto se tornam significativos quando aumentamos o ângulo de ataque, sendo possível notar sua influência, bem como a influência da velocidade.

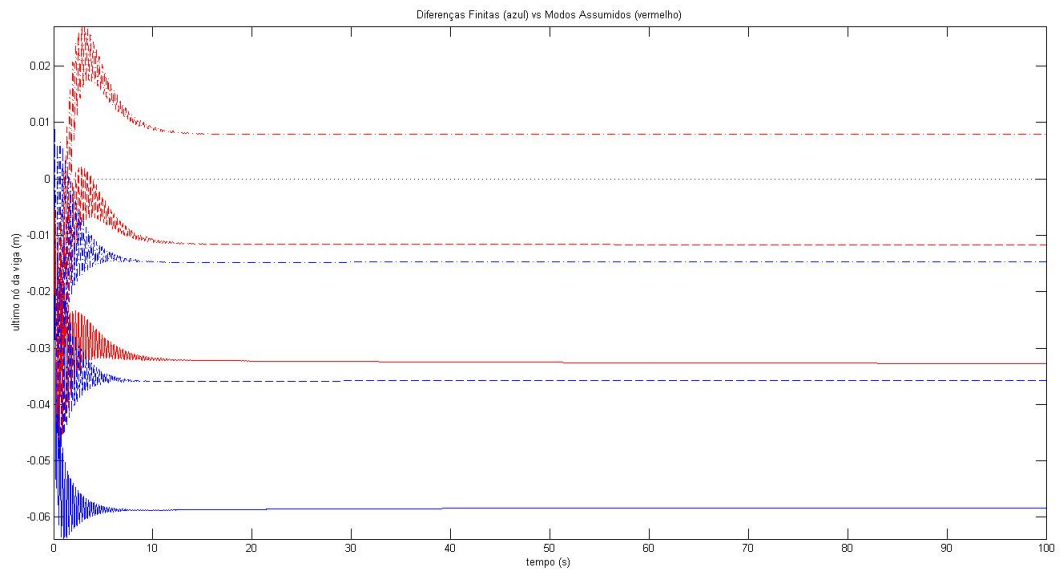


Figura 4.13: Resposta do último nó para  $\alpha = 1$  - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(traço-ponto)

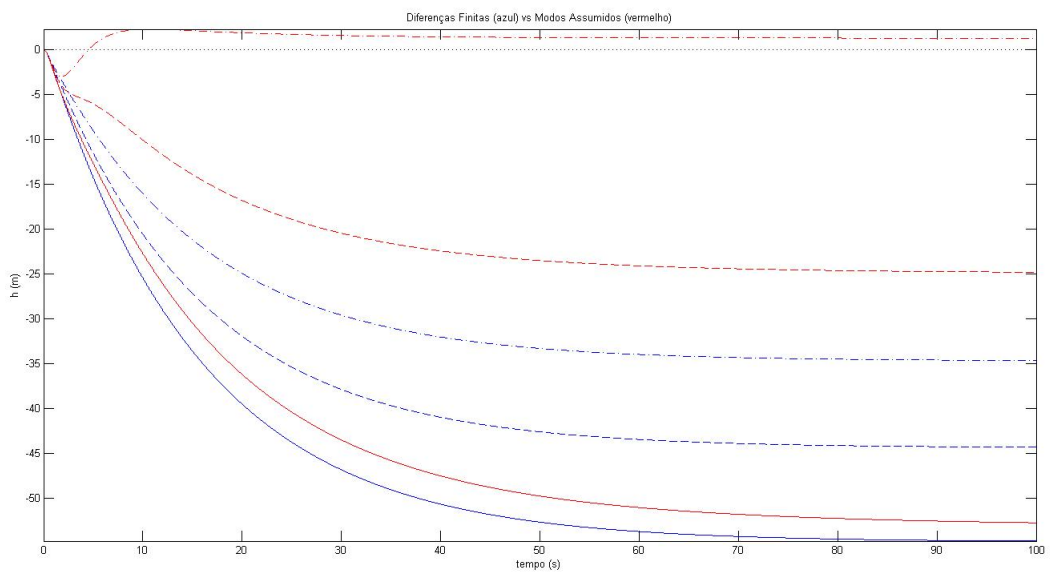


Figura 4.14: Resposta de  $h$  para  $\alpha = 1$  - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(traço-ponto)

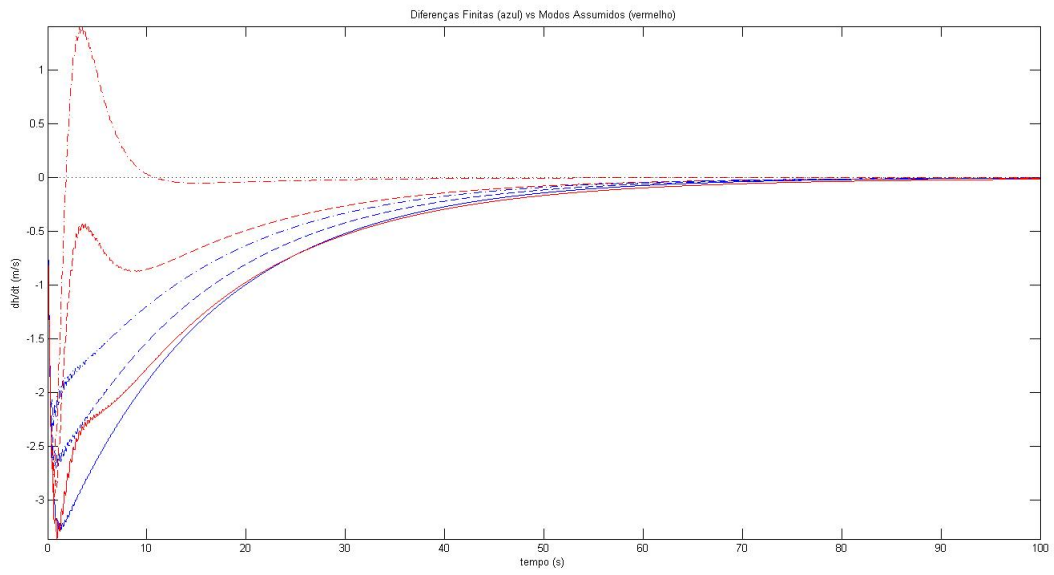


Figura 4.15: Resposta de  $\dot{h}$  para  $\alpha = 1$  - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto)

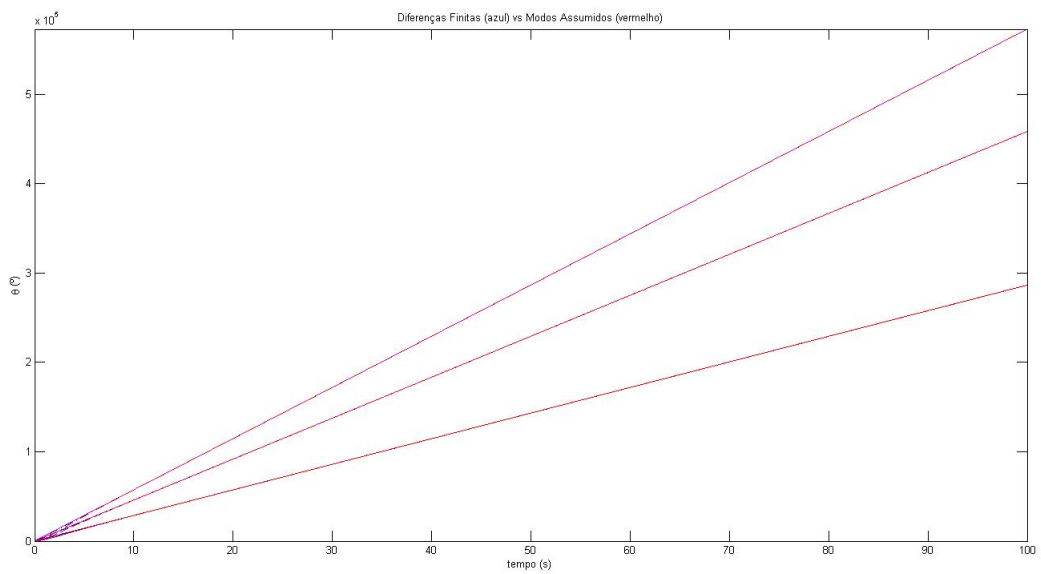


Figura 4.16: Resposta de  $\theta$  para  $\alpha = 1$  - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto)

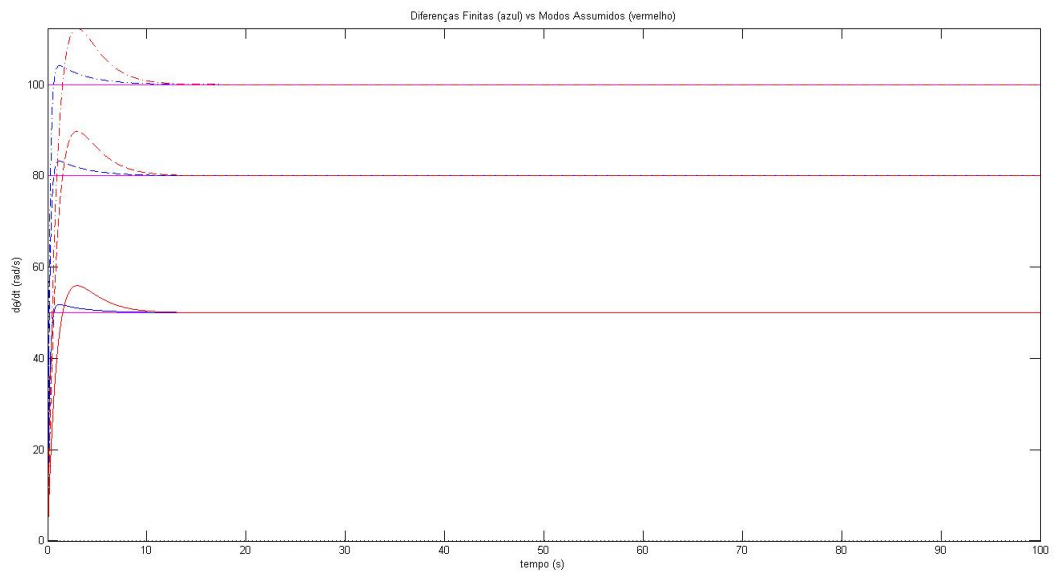


Figura 4.17: Resposta de  $\dot{\theta}$  para  $\alpha = 1$  - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto)

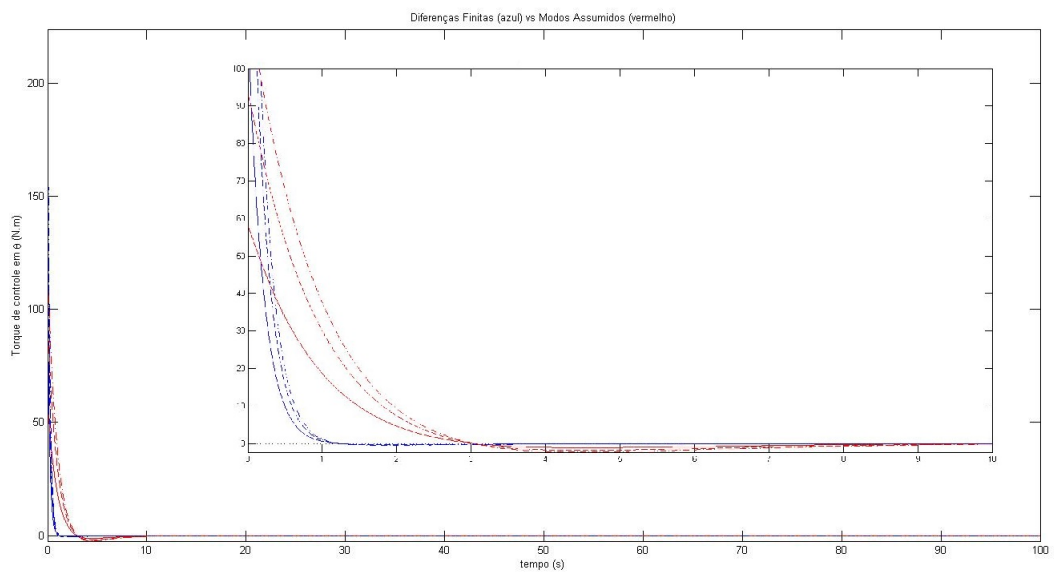


Figura 4.18: Força de controle em  $\theta$  para  $\alpha = 1$  - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto)

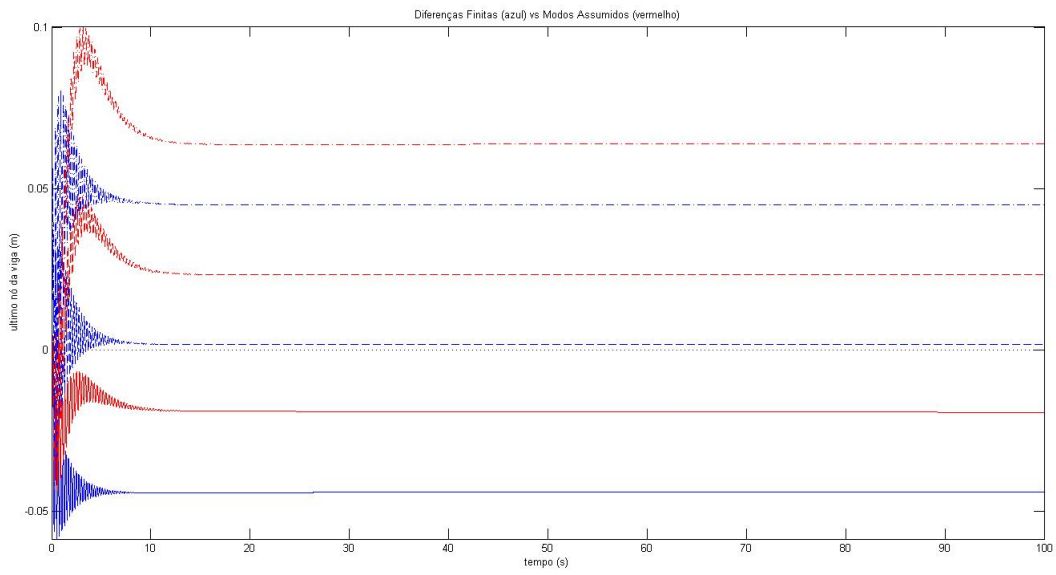


Figura 4.19: Resposta do último nó para  $\alpha = 2$  - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto)

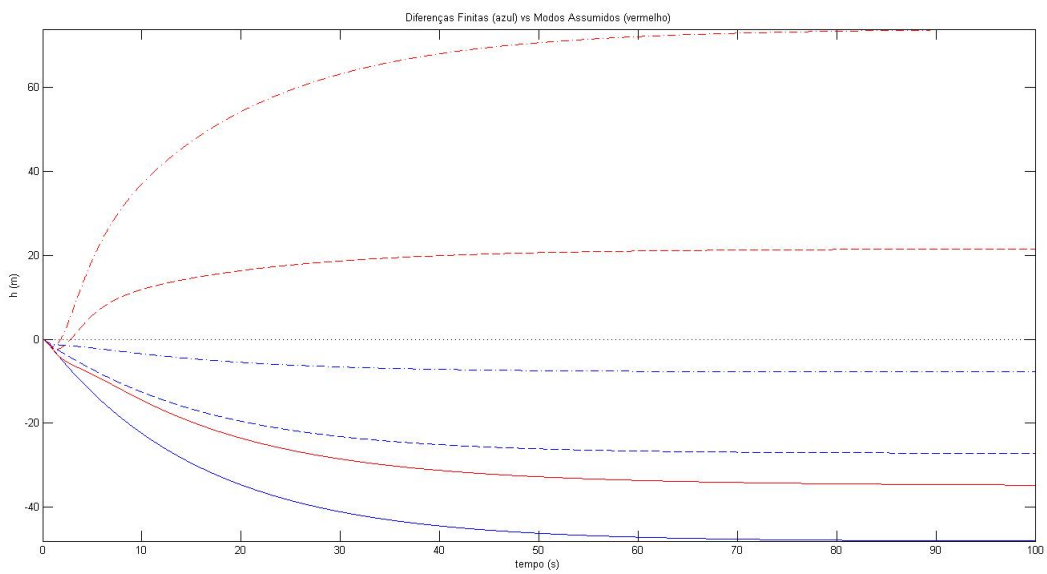


Figura 4.20: Resposta de  $h$  para  $\alpha = 2$  - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(tração-ponto)

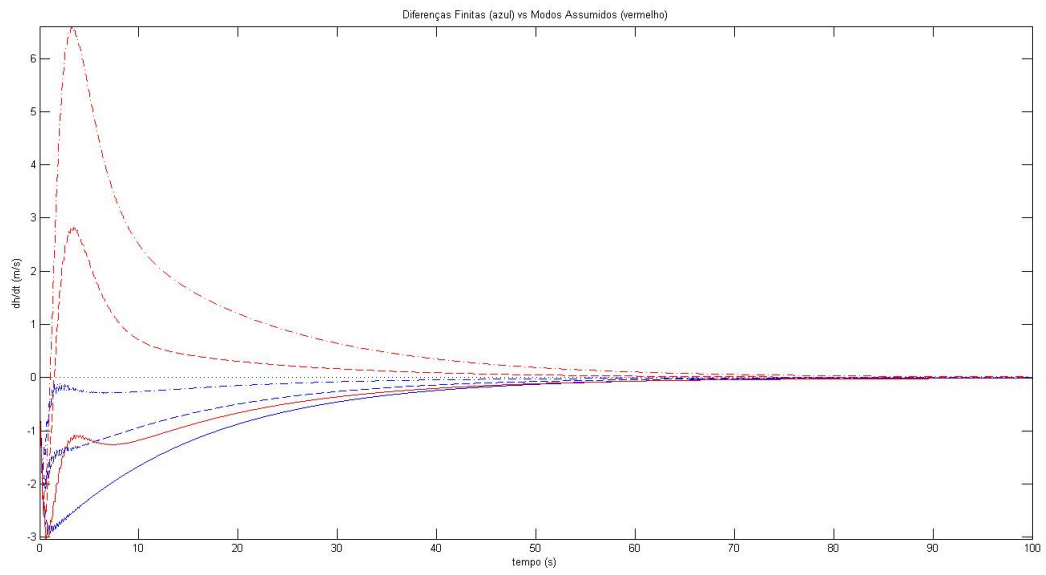


Figura 4.21: Resposta de  $\dot{h}$  para  $\alpha = 2$  - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trço-ponto)

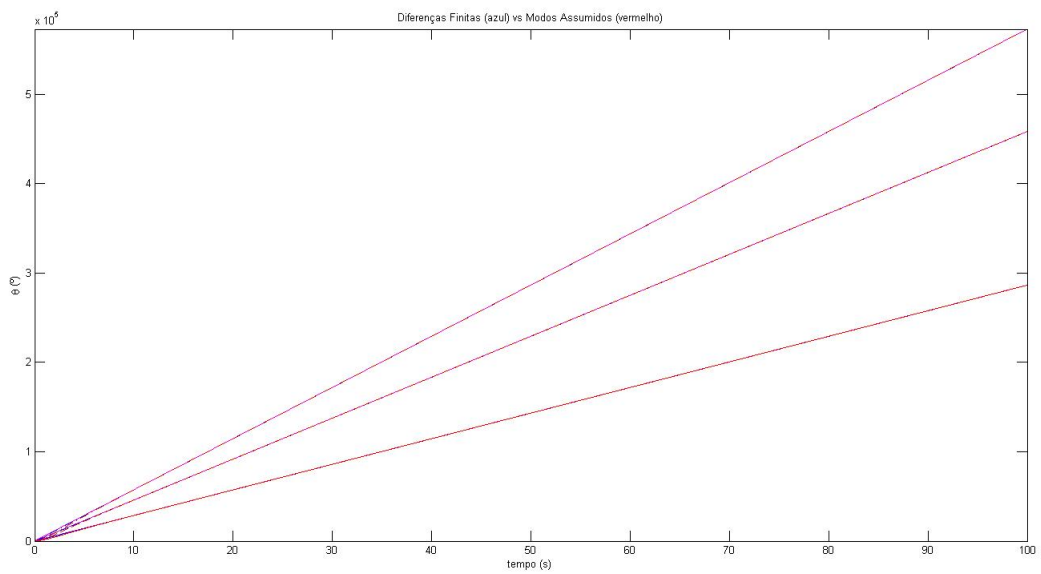


Figura 4.22: Resposta de  $\theta$  para  $\alpha = 2$  - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trço-ponto)



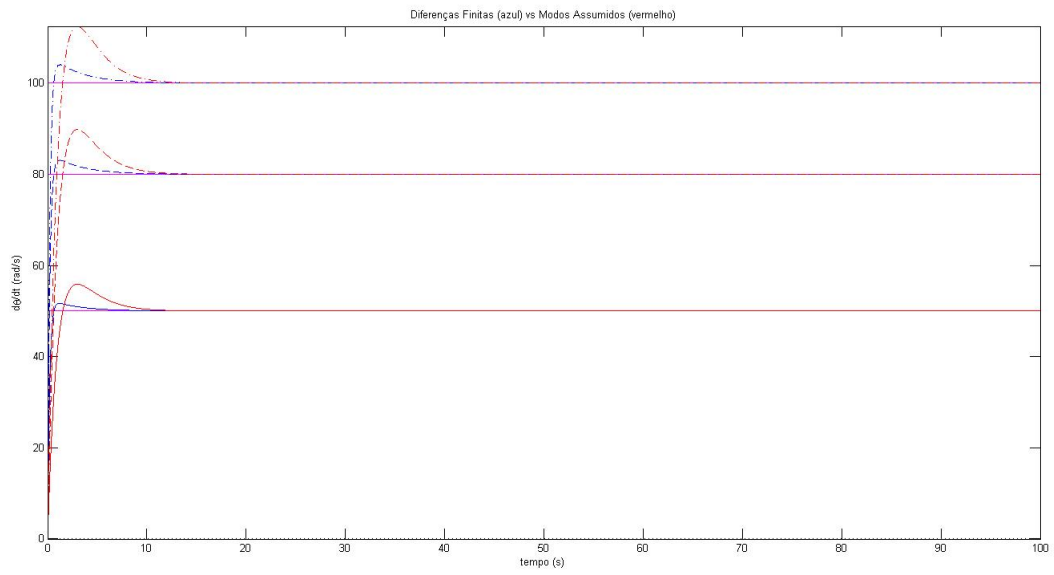


Figura 4.23: Resposta de  $\dot{\theta}$  para  $\alpha = 2 - 50\text{rad/s}$ (contínuo) vs  $80\text{rad/s}$ (tracejado) vs  $100\text{rad/s}$ (traço-ponto)

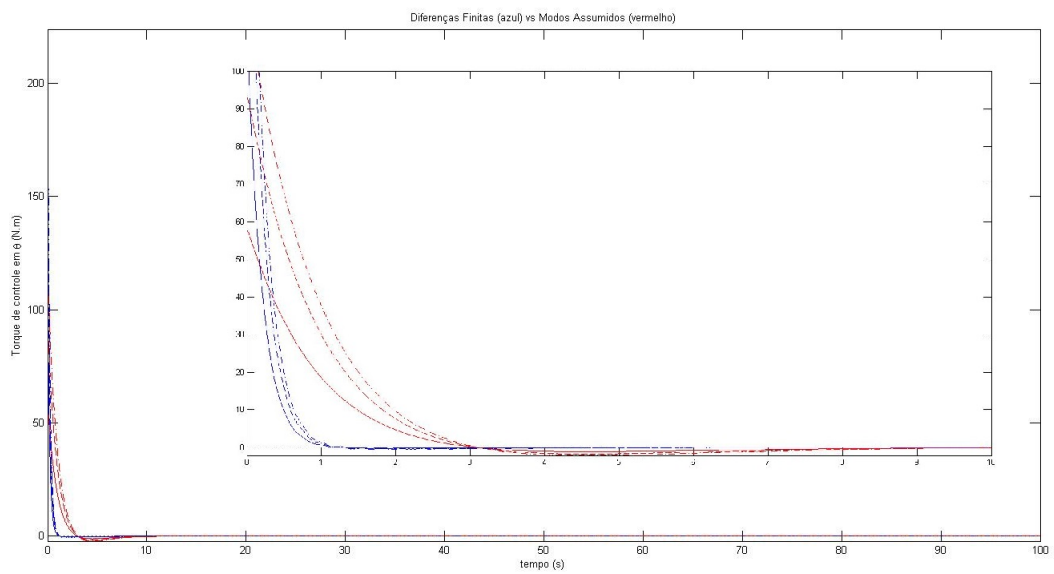


Figura 4.24: Força de controle em  $\theta$  para  $\alpha = 2 - 50\text{rad/s}$ (contínuo) vs  $80\text{rad/s}$ (tracejado) vs  $100\text{rad/s}$ (traço-ponto)

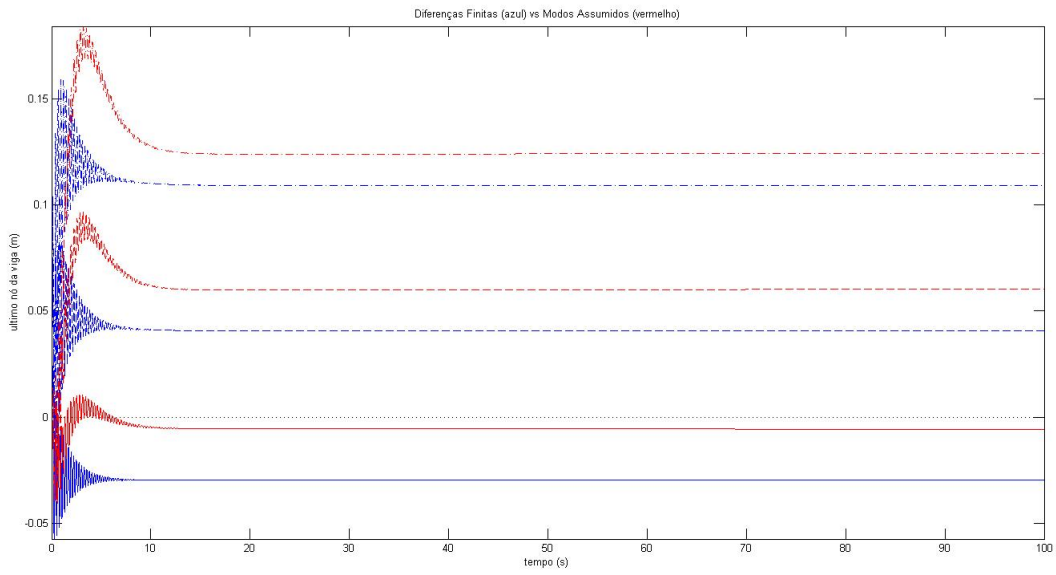


Figura 4.25: Resposta do último nó para  $\alpha = 3$  - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto)

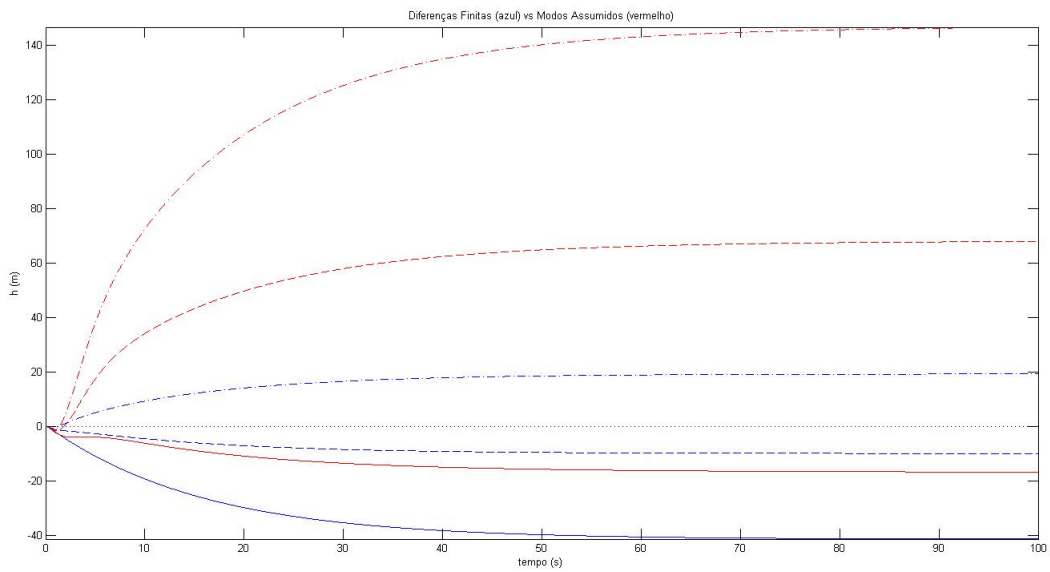


Figura 4.26: Resposta de  $h$  para  $\alpha = 3$  - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto)

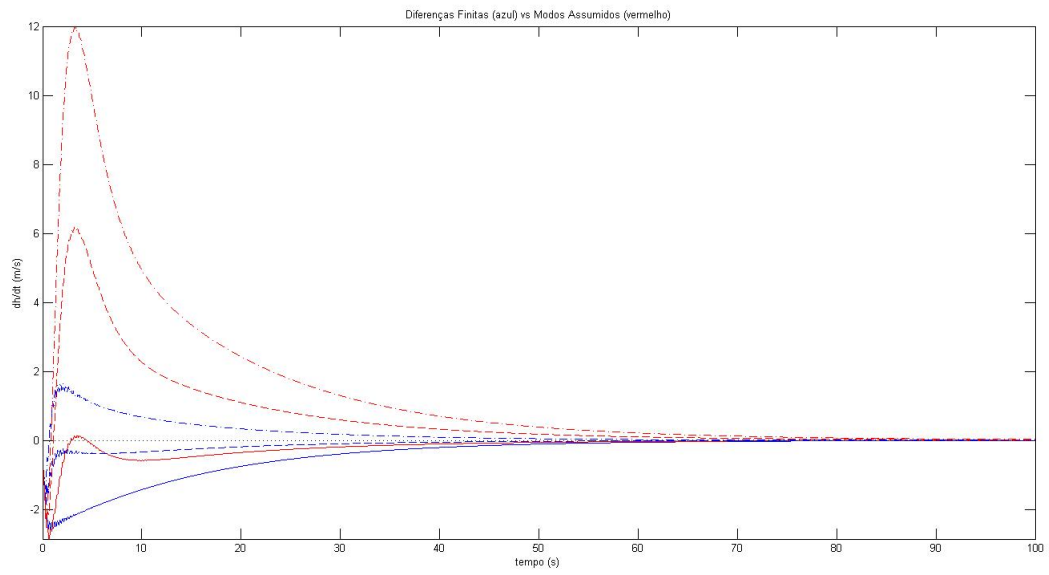


Figura 4.27: Resposta de  $\dot{h}$  para  $\alpha = 3 - 50\text{rad/s}$ (contínuo) vs  $80\text{rad/s}$ (tracejado) vs  $100\text{rad/s}$ (traço-ponto)

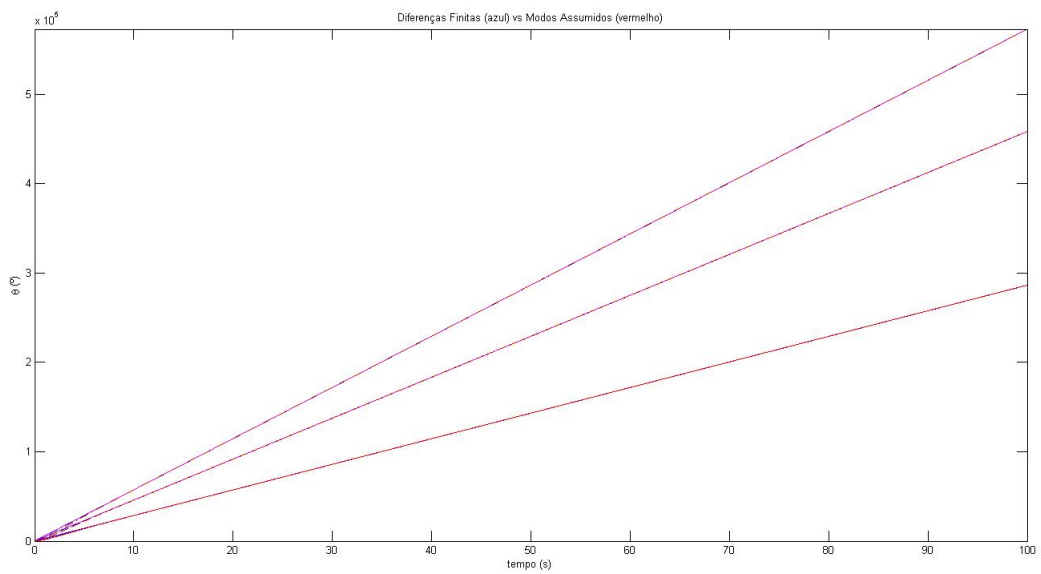


Figura 4.28: Resposta de  $\theta$  para  $\alpha = 3 - 50\text{rad/s}$ (contínuo) vs  $80\text{rad/s}$ (tracejado) vs  $100\text{rad/s}$ (traço-ponto)

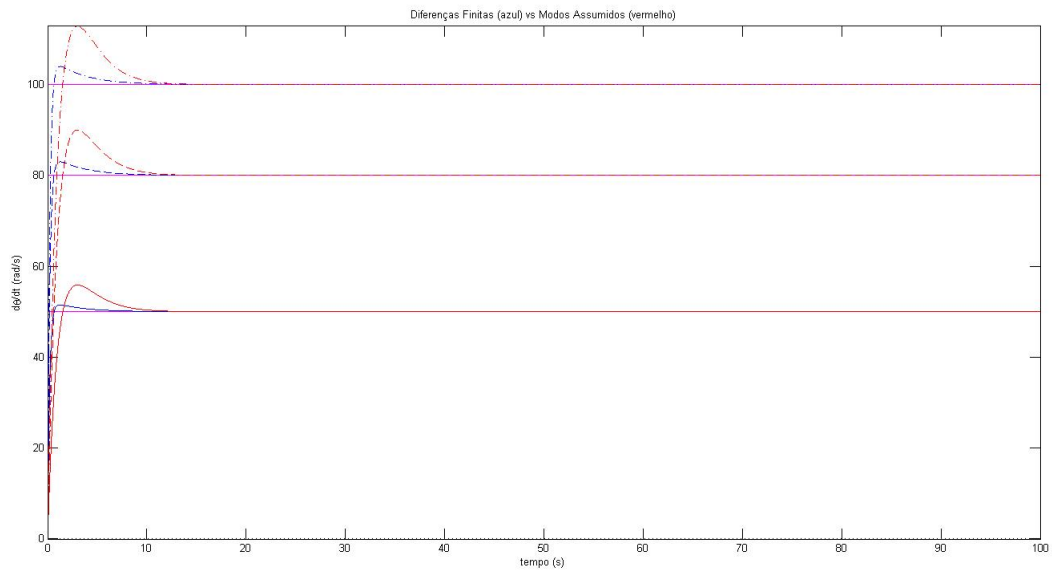


Figura 4.29: Resposta de  $\dot{\theta}$  para  $\alpha = 3$  - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trço-ponto)

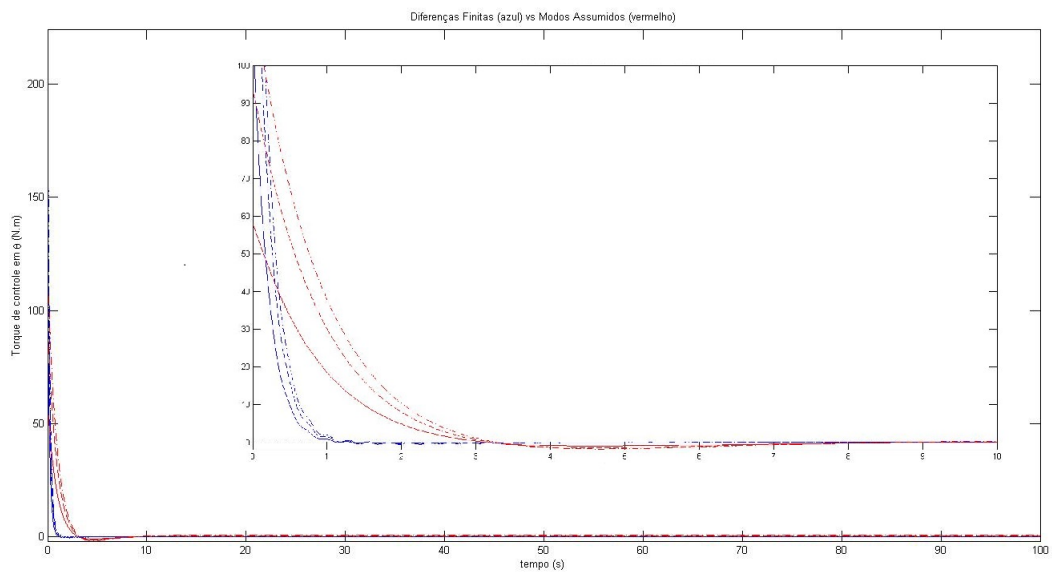


Figura 4.30: Força de controle em  $\theta$  para  $\alpha = 3$  - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trço-ponto)

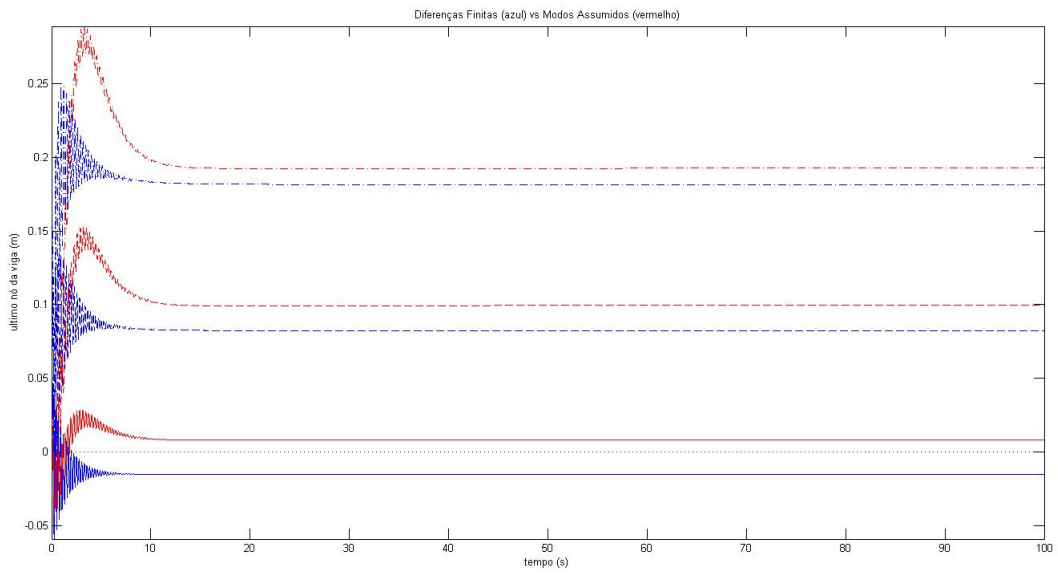


Figura 4.31: Resposta do último nó para  $\alpha = 4$  - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(traço-ponto)

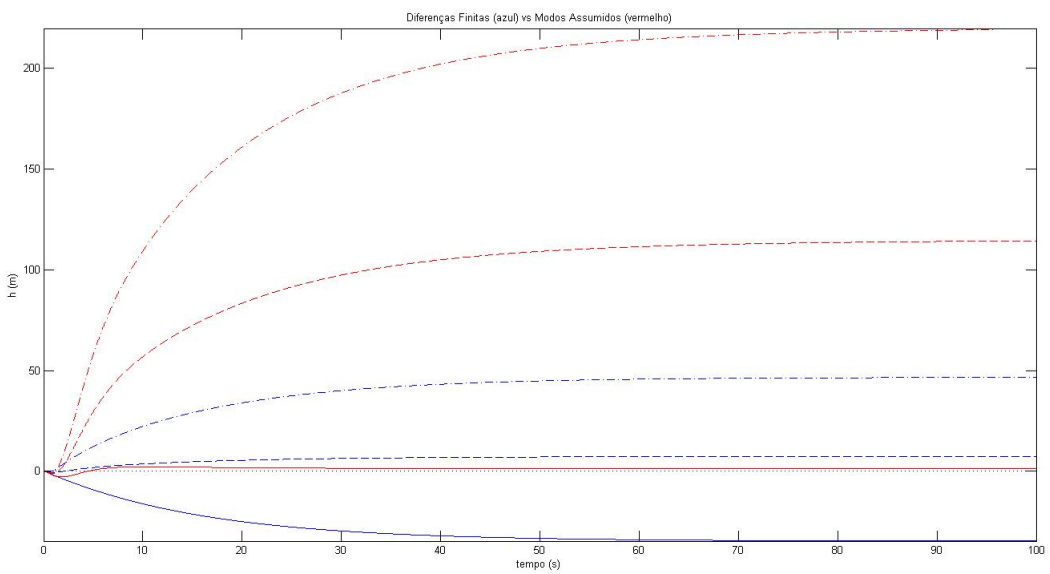


Figura 4.32: Resposta de  $h$  para  $\alpha = 4$  - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(traço-ponto)

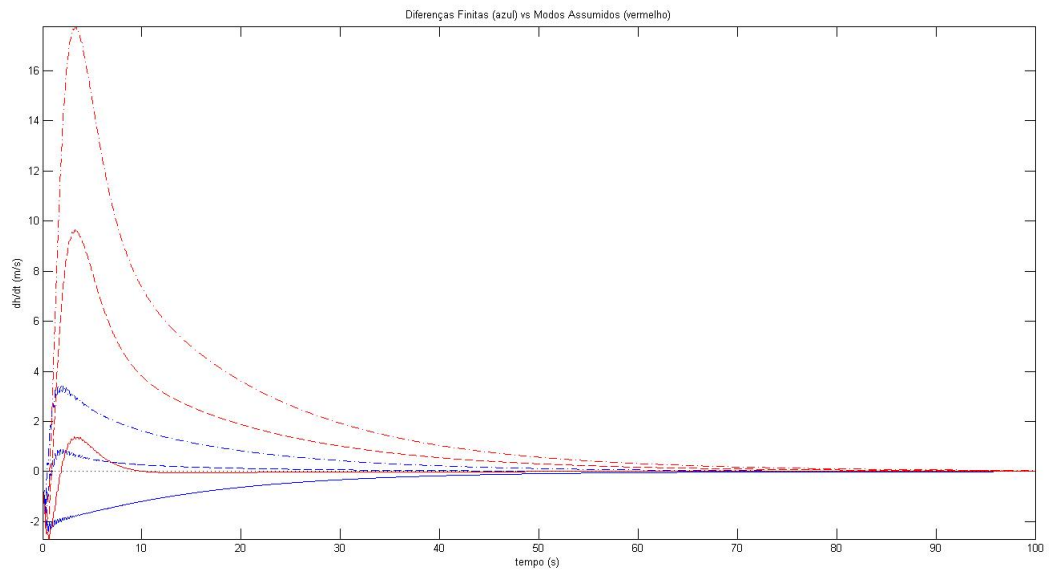


Figura 4.33: Resposta de  $\dot{h}$  para  $\alpha = 4 - 50\text{rad/s}$ (contínuo) vs  $80\text{rad/s}$ (tracejado) vs  $100\text{rad/s}$ (traço-ponto)

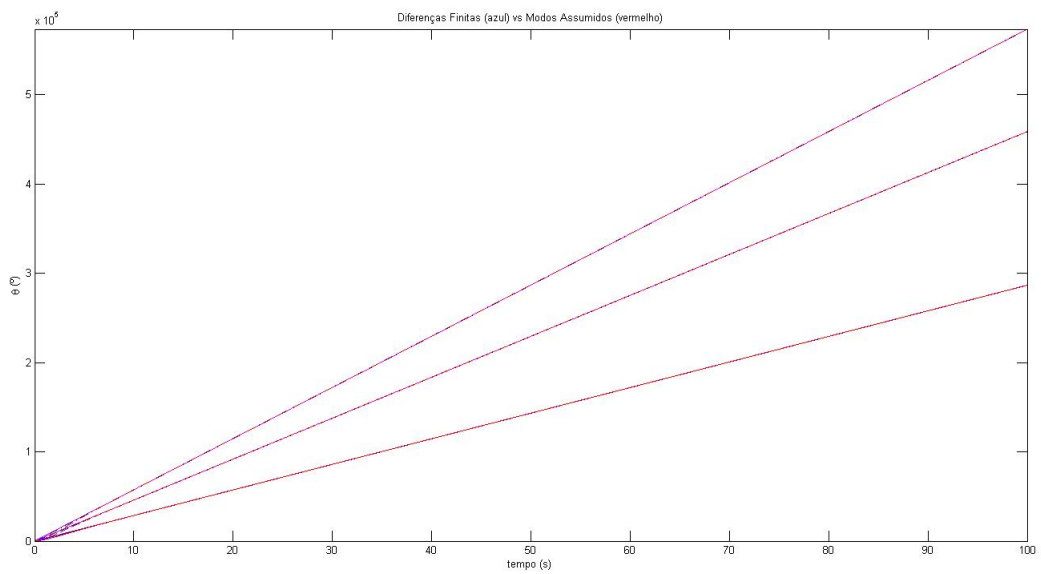


Figura 4.34: Resposta de  $\theta$  para  $\alpha = 4 - 50\text{rad/s}$ (contínuo) vs  $80\text{rad/s}$ (tracejado) vs  $100\text{rad/s}$ (traço-ponto)

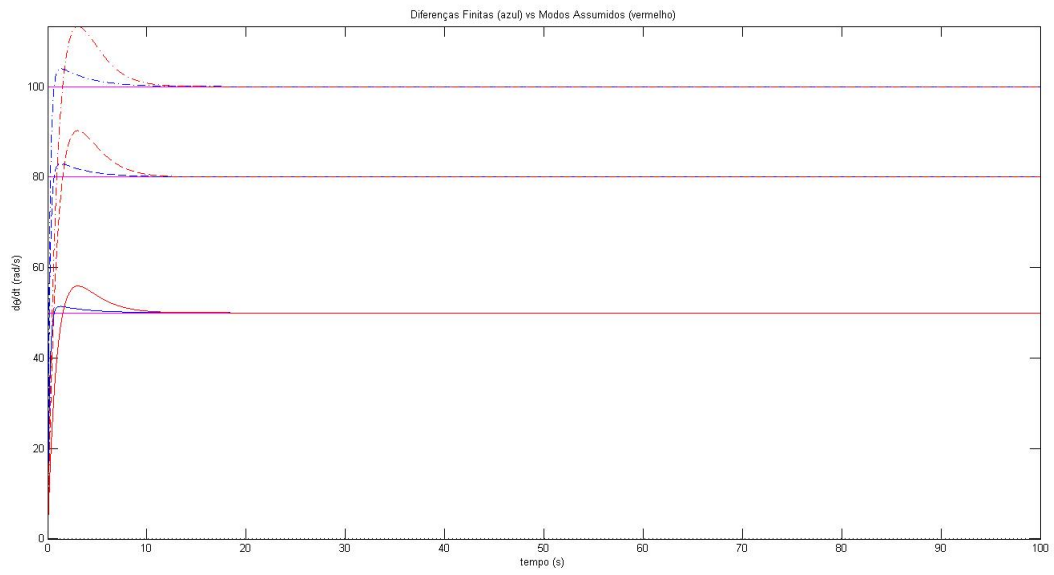


Figura 4.35: Resposta de  $\dot{\theta}$  para  $\alpha = 4 - 50\text{rad/s}$ (contínuo) vs  $80\text{rad/s}$ (tracejado) vs  $100\text{rad/s}$ (traço-ponto)

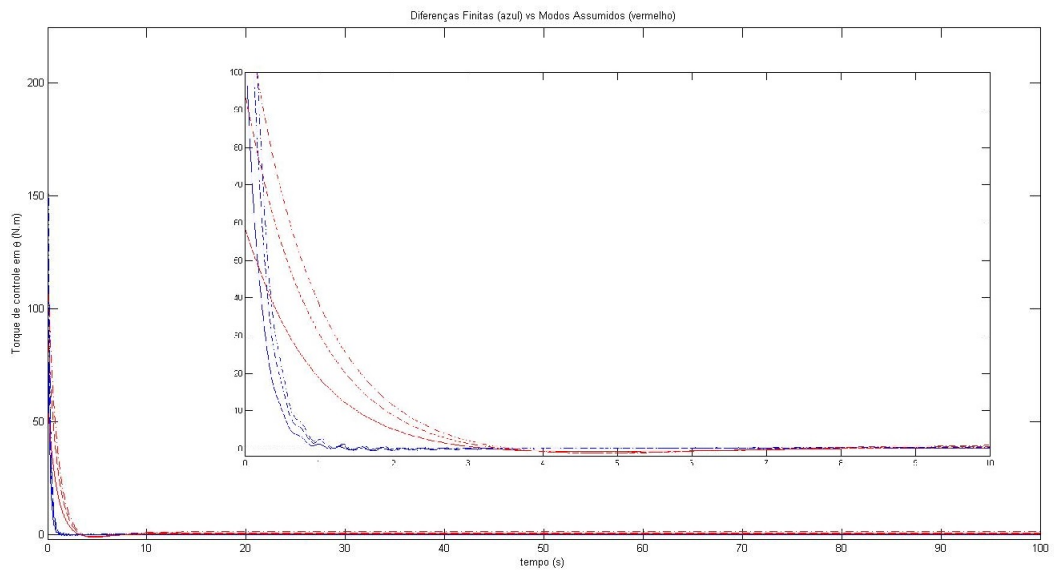


Figura 4.36: Força de controle em  $\theta$  para  $\alpha = 4 - 50\text{rad/s}$ (contínuo) vs  $80\text{rad/s}$ (tracejado) vs  $100\text{rad/s}$ (traço-ponto)

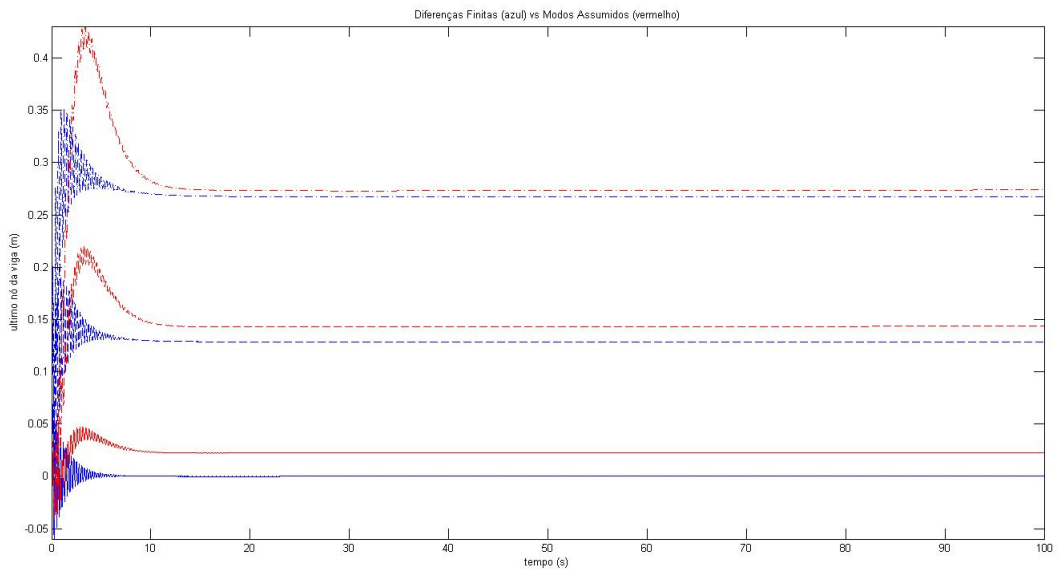


Figura 4.37: Resposta do último nó para  $\alpha = 5$  - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto)

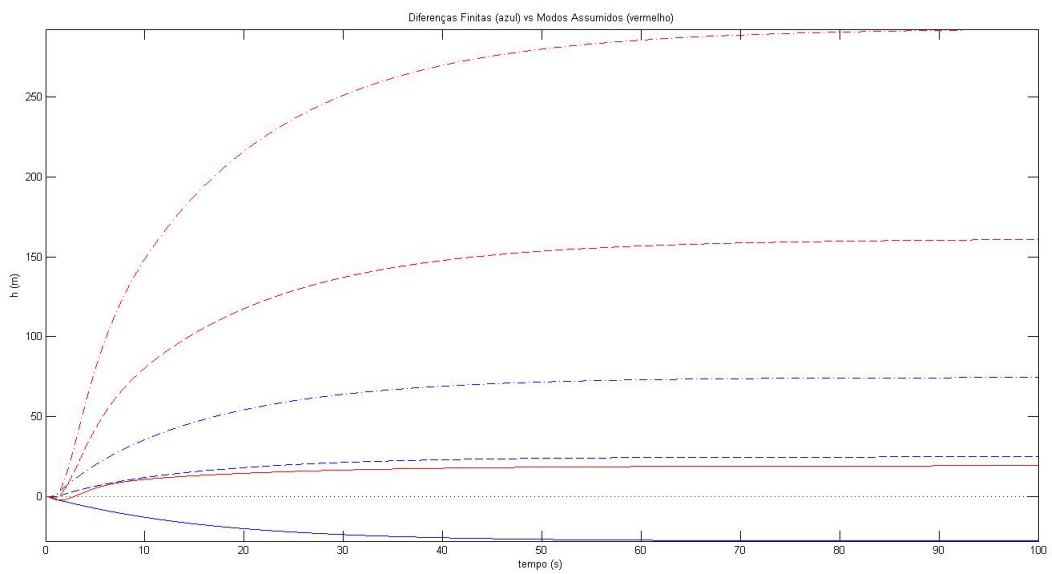


Figura 4.38: Resposta de  $h$  para  $\alpha = 5$  - 50rad/s(contínuo) vs 80rad/s(tracejado) vs 100rad/s(trazo-ponto)



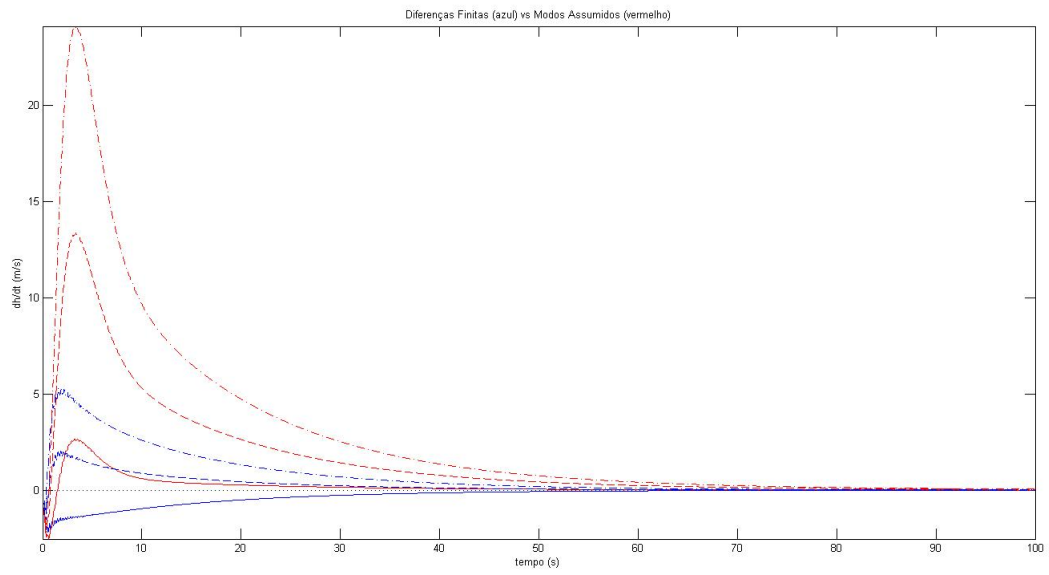


Figura 4.39: Resposta de  $\dot{h}$  para  $\alpha = 5 - 50\text{rad/s}$ (contínuo) vs  $80\text{rad/s}$ (tracejado) vs  $100\text{rad/s}$ (traço-ponto)

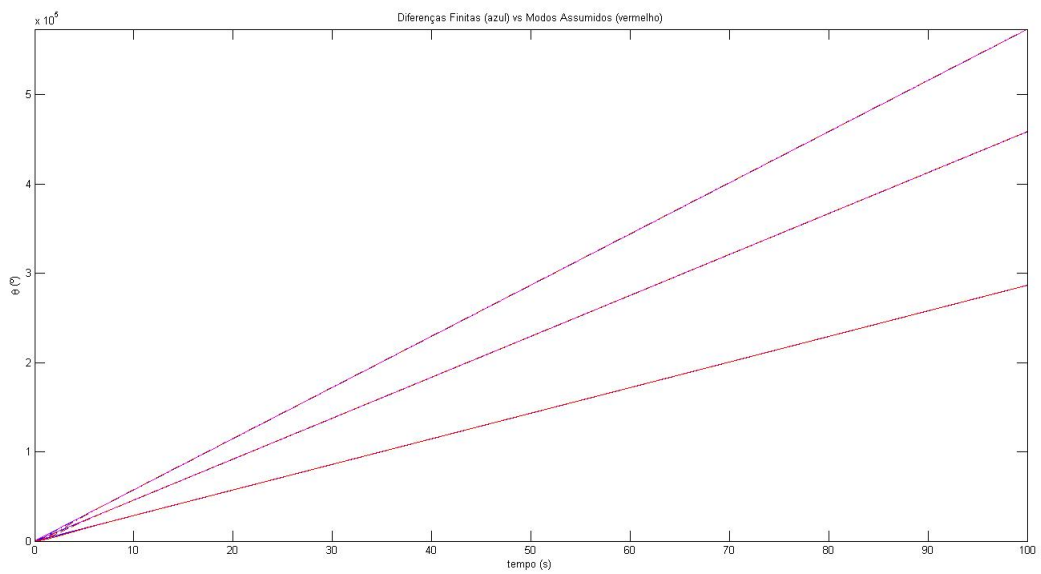


Figura 4.40: Resposta de  $\theta$  para  $\alpha = 5 - 50\text{rad/s}$ (contínuo) vs  $80\text{rad/s}$ (tracejado) vs  $100\text{rad/s}$ (traço-ponto)

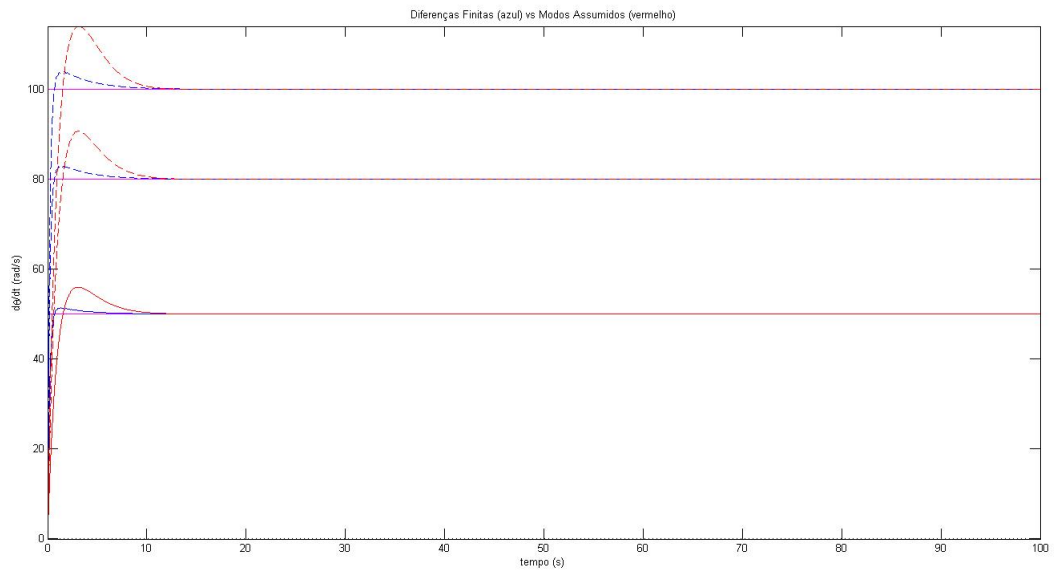


Figura 4.41: Resposta de  $\dot{\theta}$  para  $\alpha = 5 - 50\text{rad/s}$ (contínuo) vs  $80\text{rad/s}$ (tracejado) vs  $100\text{rad/s}$ (traço-ponto)

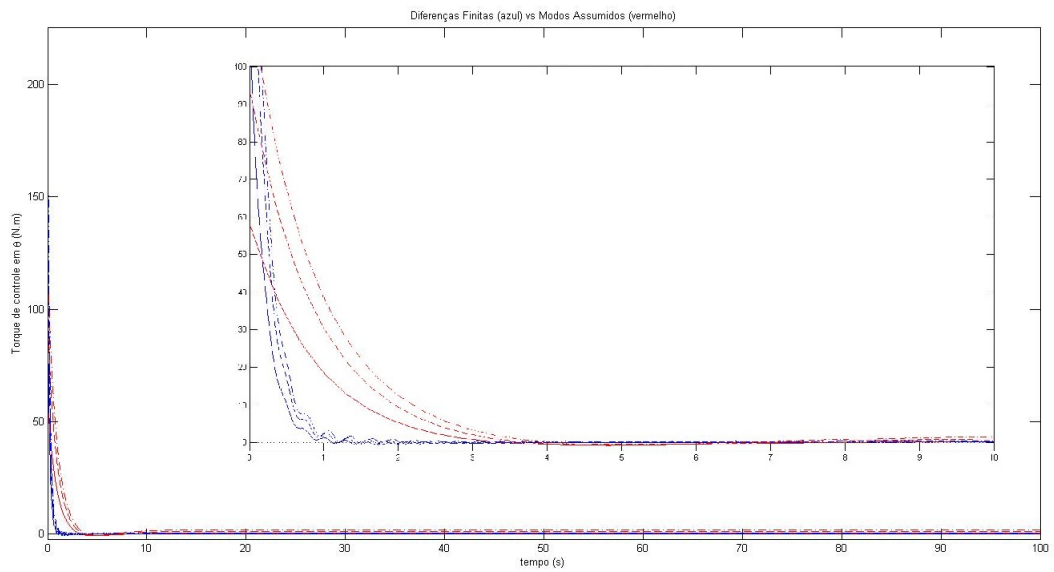


Figura 4.42: Força de controle em  $\theta$  para  $\alpha = 5 - 50\text{rad/s}$ (contínuo) vs  $80\text{rad/s}$ (tracejado) vs  $100\text{rad/s}$ (traço-ponto)

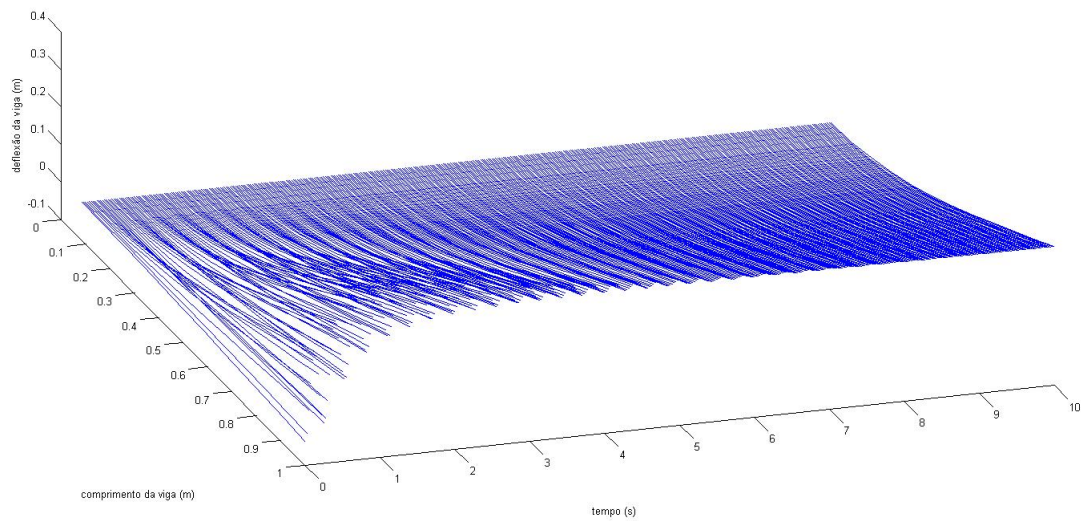


Figura 4.43: Evolucao temporal da viga para  $\alpha = 5$  e  $\dot{\theta} = 100rad/s$

A influência da discretização é bastante nítida mesmo no caso com ângulo de ataque nulo, no entanto, conforme aumentamos  $\alpha$  e a velocidade, as não-linearidades se tornam cada vez mais significativas, fazendo com que a diferença entre os métodos se torne cada vez mais relevante.

A partir dos gráficos de  $h$ , é possível perceber que para cada ângulo de ataque escolhido (desde que  $\alpha > 0$ ), existe uma velocidade mínima na qual a sustentação gerada, equilibre a força peso e evite que o sistema comece a cair.

Para o caso representado na figura 4.37, seria necessário utilizar outro modelo de viga não-linear, pois o modelo de viga linear é válido apenas para deflexão menor que 20%.

Foram encontrados conjuntos de ganho que fornecem uma convergência mais rápida, no entanto, não faziam sentido real considerando o tempo de resposta dos dispositivos disponíveis. Além disso, esse conjunto de ganhos tem mais influência sobre o regime permanente, ou seja, para otimizar de fato a resposta seria necessário complementar a técnica de modo a agir sobre o transitório.

## Conclusões

No presente trabalho é proposto um modelo dinâmico de uma viga flexível engastada, representando uma asa sob a influência de forças aerodinâmicas de arrasto e sustentação. As equações foram obtidas através do método de energia, utilizando o princípio estendido de Hamilton e as equações de Euler-Lagrange, produzindo um sistema determinístico de equações diferenciais parciais não-lineares acopladas.

Este sistema de equações, embora possua hipóteses simplificadoras, considera os processos físicos fundamentais da dinâmica de uma viga flexível em rotação, considerando sua interação com o fluido em que está imerso, onde as forças de arrasto e de sustentação são modeladas como potenciais derivados de forças. A finalidade é de desenvolver um modelo de interação fluido-estrutura que contém as características físicas fundamentais do problema, mas, ao mesmo tempo, podem ser resolvidos utilizando técnicas numéricas simples.

A discretização das integrais foi feita a partir da regra estendida de Simpson, a discretização espacial da viga flexível foi feita a partir do método de diferenças finitas utilizando cinco pontos e do método dos modos assumidos utilizando o primeiro modo da viga engastada-livre, e o tempo foi discretizado através do Runge-Kutta de 4 ordem explícito. Na discretização via diferenças finitas, as condições de contorno do problema foram incorporadas através da inserção de nós virtuais, enquanto na discretização via modos assumidos as condições de contorno aparecem naturalmente da escolha do modo .

No método das diferenças o domínio de integração é dividido em vários pontos e a equação é integrada diretamente em cada ponto, para compor a solução final, sendo a qualidade da solução função da quantidade de pontos em que seu domínio é dividido. Já no método dos modos assumidos, assume-se que a solução é um produto de uma função ordinária espacial por uma função ordinária temporal, sendo a qualidade da solução função de quanto o modo escolhido representa seu problema, bem como a quantidade de modos escolhidos para aproximar a solução. Como foi escolhido apenas o primeiro modo para a viga engastada-livre estática, é esperado

que a solução via modos assumidos não represente exatamente o sistema, ou seja, é desejado avaliar o quanto ele consegue representar o sistema, em diferentes situações, comparando com diferenças finitas que integra diretamente sem utilizar aproximações. Dessa forma, é possível notar que:

- Existem ganhos que convergem para discretização via diferenças finitas e divergem para solução via modos assumidos.
- As respostas obtidas a partir do método dos modos assumidos são superestimados, em relação ao método de diferenças finitas.
- Para  $\alpha = 0$  a resposta do sistema independe da velocidade, pois os efeitos gerados pelo fluido são nulos para sustentação.
- O erro entre os dois métodos cresce conforme aumentamos o ângulo de ataque e a velocidade, devido ao aumento das não linearidades.
- Para cada valor de ângulo de ataque, existe uma velocidade mínima para que a sustentação equilibre o peso.
- Para os casos em que a deflexão da viga seja superior a 20% é necessário utilizar a teoria de viga não-linear.

As simulações para o modelo completo com controle mostram a robustez da técnica SDRE, pois mesmo quando submetido a não linearidades muito significativas, o sistema foi controlado de forma bastante eficiente. Apesar do método de modos assumidos carregar muitos erros em relação a diferenças finitas, o controle foi capaz de tornar a dinâmica estável mesmo quando os erros envolvidos na aproximação dos coeficientes de sustentação e arrasto eram extremos, por conta do grande ângulo de ataque proposto.

Para trabalhos futuros será feita uma análise de estabilidade do sistema, buscando encontrar ganhos otimizados, bem como trabalhar na parte transiente da resposta, utilizando a equação diferencial de Ricatti. Além disso, será proposto um perfil aerodinâmico afim de substituir o perfil de placa plana, para tornar os efeitos de escoamento e interação fluido-estrutura mais próximos de um modelo real.

A partir da estimação de parâmetros do sistema, espera-se encontrar uma representação fiel da dinâmica de um rotor e então aplicar a técnica de controle proposta, em um protótipo real.

## Referências Bibliográficas

- Bielawa, R. L. (1984). Extended aeroelastic analysis for helicopter rotors with prescribed hub motion and blade appended pendulum vibration absorbers, *NASA CR-172455*, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C.
- Bogdanov, A. and Wan, E. (n.d.a). Sdre control with nonlinear feedforward compensation for a small unmanned helicopter.
- Bogdanov, A. and Wan, E. (n.d.b). State-dependent riccati equation control for small autonomous helicopters, *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **30**: 47–60.
- Cao, Y., Li, D., Zhang, Q. and Bian, H. (n.d.). Existence theorems in the theory of mixtures, *Recent Patents on Engineering* **1**(1): 49–70.
- Çimen, T. (2008). State-dependent riccati equation (sdre) control: A survey, *International Federation of Automatic Control* pp. 3761–3775.
- Çimen, T. (2009). Development and validation of a mathematical model for control of constrained nonlinear oil tanker motion, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* **15**: 17–49.
- Chang, I. (2010). Nonlinear attitude control of a tether-connected multi-satellite system in three-dimensional free space, *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions* **46**: 1950–1968.
- Cloutier, J. R. and Stansbery, D. T. (2001). Nonlinear, hybrid bank-to-turn/skid-to-turn missile autopilot design, *Technical report*.
- Conlisk, A. T. (1997). Modern helicopter aerodynamics, *Annu. Rev. Fluid Mech*, Vol. 29, The Ohio State University, pp. 515–567.

- Erdem, E. B. and Alleyne, A. G. (2004). Design of a class of nonlinear controllers via state dependent riccati equations., *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **12**: 2986–2991.
- Fenili, A., Francisco, C. P. F. and Burr, K. P. (2013). Mathematical modelling of a rotating nonlinear flexible beam-like wing.
- Hald, U. B., Hesselbaek, M. V. and Siegumfeldt, M. (2006). *Nonlinear modeling and optimal control of a miniature autonomous helicopter*, M.Sc. dissertation, Aalborg University, Aalborg, Denmark.
- Innocenti, M., Baralli, F., Salotti, F. and Caiti, A. (2000). Manipulator path control using sdre, *Proceedings of the American Control Conference* pp. 3348–3352.
- Laks, J. H., Pao, L. Y. and Wright, A. D. (n.d.). Control of wind turbines: Past, present, and future.
- Langson, W. and Alleyne, A. (2002). A stability result with application to nonlinear regulation, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **124**: 452–456.
- Menon, P. K. and Ohlmeyer, E. J. (n.d.). Computer-aided synthesis of nonlinear autopilots for missiles, *Nonlinear Studies* **11**(2): 173–198.
- Merttopcuoglu, A. O., Kahvecioğlu, A. and Çimen, T. (n.d.). Sdre control of the control actuation system of a guided missile., *In: Proc. of the IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace* **17**: 774–779.
- Pan, L. and Renliang, C. (n.d.). A mathematical model for helicopter comprehensive analysis, *Chinese Journal of Aeronautics* **23**(3): 320–326.
- Pettersen, R., Mustafic, E. and Fogh, M. (2005). *Nonlinear control approach to helicopter autonomy*, M.Sc. dissertation, Aalborg University, Aalborg, Denmark.
- Reffley, R. K. and Mních, M. A. (1986). Minimum-complexity helicopter simulation math model program, *NASA Manudyne Report 83-2-3*, U.S. Army AeroFlightDynamics Directorate, Moffett Field, CA 94035.
- Schubel, P. J. and Crossley, R. J. (2012). Wind turbine blade design, *Energies* (2): 3425–3449.
- Singh, N. M., Dubey, J. and Laddha, G. (2008). Control of pendulum on a cart with state dependent riccati equations, *World Academy of Science, Engineering and Technology* **31**: 672–676.
- Takahashi, M. D. (1990). A flight-dynamic helicopter mathematical model with a single flap-lag-torsion main rotor, *NASA TM-102267*, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C.

Talbot, P. D., Tinling, B. E., Decker, W. A. and Chen, R. T. N. (1982). A mathematical model of a single main rotor helicopter for piloted simulation, *NASA TM-84281*, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C.



## Apêndice A - Regra de Simpson Extendida

Para resolver as equações, foi necessário aproximar os operadores de integração através de uma quadratura numérica. A regra de quadratura escolhida foi a Regra de Simpson Extendida

$$\int_{x_1}^{x_{2n+1}} f(x)dx = \frac{\Delta x}{3} [f_1 + 4(f_2 + f_4 + \dots + f_{2n}) + 2(f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1}) + f_{2n+1}] - \frac{n(\Delta x)^5}{90} f^{(4)}(\zeta) \quad (\text{A.1})$$

com erro de truncamento de  $O(\Delta x^5)$ .

A discretização utilizada transforma uma integral contínua de uma dada função, em um somatório discreto da mesma

$$\int_0^l F(x)dx = \sum_{j=1}^N F_j w_j \Delta x \quad (\text{A.2})$$

com os seguintes pesos

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{3} \\ w_{2j} &= \frac{4}{3} \text{ para } j = 1, \dots, (N-1)/2 \\ w_{2j+1} &= \frac{2}{3} \text{ para } j = 1, \dots, (N-1)/2 - 1 \\ w_N &= \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Note que  $N$  no caso da regra de Simpson extendida deve ser um número inteiro ímpar.

## Apêndice B - Diferenças Finitas

Uma das maneiras escolhidas para resolver o sistema de equações proposto, foi aproximar os operadores de diferenciação no deslocamento por operadores de diferenças finitas. Dessa forma foi necessário realizar uma discretização da estrutura, que é apresentada esquematicamente na figura ??:

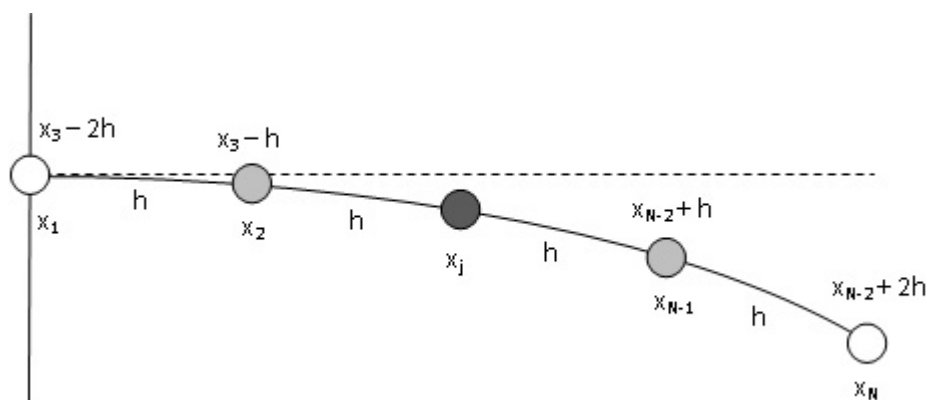


Figura B.1: discretização espacial da viga.

onde o nó  $x_j$  representa todos os nós internos da estrutura, que dependentem do grau de refinamento que necessitamos para a malha. Para realizar a aproximação da  $n$ -ésima derivada em um nó  $x_j$ , utilizando informação de  $k$  nós vizinhos, podemos utilizar a seguinte relação

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x_j) \approx D_k^n f_j = \sum_{l=m}^{m+k-1} \frac{A_l}{(\Delta x)^n} f(x_j + (l-j)\Delta x) \quad (\text{B.1})$$

onde  $A_l$  são os pesos utilizados na fórmula de diferenças finitas, que depende do valor de  $k$ , do valor de  $n$ , do valor de  $m$  e do valor de  $j$ , e a fórmula utilizada é a de diferenças centradas. Como estamos lidando com derivadas de quarta ordem, será necessário utilizar 5 pontos da malha para aproximar a derivada em cada ponto, onde o erro de truncamento é da ordem  $Oh^5$ .

## B.1 Diferença Centrada e Condições de Contorno

Podemos representar a equação (B.1) na forma de diferenças centradas, com uma notação menos geral, mas mais conveniente para esta abordagem.

$$\frac{\partial^4 v(x_j, t)}{\partial x^4} = \frac{v(x_j + 2h, t) - 4v(x_j + h, t) + 6v(x_j, t) - 4v(x_j - h, t) + v(x_j - 2h, t)}{h^4} \quad (\text{B.2})$$

ou ainda

$$\frac{\partial^4 v(x_j, t)}{\partial x^4} = \frac{v_{j+2} - 4v_{j+1} + 6v_j - 4v_{j-1} + v_{j-2}}{h^4} \quad (\text{B.3})$$

No entanto, utilizando diferenças centradas, temos problemas nos nós das pontas ( $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_{N-1}$  e  $x_N$ ), pois neles não temos nós vizinhos suficientes para utilizar a relação (B.3). Dessa forma vamos considerar nós virtuais, e utilizar as condições de contorno do problema para escreve-los de forma explícita e encontrar os pesos da regra de diferenciação.

### B.1.1 Nó $x_1$

Da condição de deslocamento nulo no engaste, temos

$$v(x_1, t) = 0 \quad (\text{B.4})$$

ou seja, a solução trivial satisfaz esse ponto

$$\frac{\partial^4 v(x_1, t)}{\partial x^4} = 0 \quad (\text{B.5})$$

### B.1.2 Nó $x_2$

Utilizando a equação (B.2) para o nó  $x_2$ , temos:

$$\frac{\partial^4 v(x_2, t)}{\partial x^4} = \frac{v(x_2 + 2h, t) - 4v(x_2 + h, t) + 6v(x_2, t) - 4v(x_2 - h, t) + v(x_2 - 2h, t)}{h^4} \quad (\text{B.6})$$

mas o ponto  $x_2 - 2h$  está fora do intervalo.

Da condição de rotação nula no engaste, temos

$$\frac{\partial v(x_2, t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.7})$$

Podemos aproximar a derivada no ponto  $x_1$  pela diferença centrada utilizando 3 pontos

$$\frac{v(x_1 + h, t) - v(x_1 - h, t)}{2h} = 0 \quad (\text{B.8})$$

que, devido ao passo  $h$  constante, pode ser reescrito como

$$\frac{v(x_1 + h, t) - v(x_2 - 2h, t)}{2h} = 0 \quad (\text{B.9})$$

ou seja

$$v(x_1 + h, t) = v(x_2 - 2h, t) \quad (\text{B.10})$$

Dessa forma, podemos denotar a quarta derivada em relação ao nó  $x_2$  como

$$\frac{\partial^4 v(x_i, t)}{\partial x^4} = \frac{v_4 - 4v_3 + 7v_2 - 4v_1}{h^4} \quad (\text{B.11})$$

### B.1.3 Nó $x_{N-1}$

Utilizando a equação (B.2) para o nó  $x_{N-1}$ , temos:

$$\frac{\partial^4 v(x_{N-1}, t)}{\partial x^4} = \frac{v(x_{N-1} + 2h, t) - 4v(x_{N-1} + h, t) + 6v(x_{N-1}, t) - 4v(x_{N-1} - h, t) + v(x_{N-1} - 2h, t)}{h^4} \quad (\text{B.12})$$

mas o ponto  $x_{N-1} + 2h$  está fora do intervalo.

Da condição de momento fletor nulo no ultimo nó, temos

$$\frac{\partial^2 v(x_N, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{B.13})$$

Podemos aproximar a segunda derivada no ponto  $x_N$  pela diferença centrada utilizando 3 pontos

$$\frac{v(x_N + h, t) - 2v(x_N, t) + v(x_N - h, t)}{h^2} = 0 \quad (\text{B.14})$$

que, devido ao passo  $h$  constante, pode ser reescrito como

$$\frac{v(x_{N-1} + 2h, t) - 2v(x_N, t) + v(x_5 - h, t)}{h^2} = 0 \quad (\text{B.15})$$

ou seja

$$v(x_{N-1} + 2h, t) = 2v(x_N, t) - v(x_N - h, t) \quad (\text{B.16})$$

Dessa forma, podemos denotar a quarta derivada em relação ao nó  $x_{N-1}$  como

$$\frac{\partial^4 v(x_{N-1}, t)}{\partial x^4} = \frac{-2v_N + 5v_{N-1} - 4v_{N-2} + v_{N-3}}{h^4} \quad (\text{B.17})$$

#### B.1.4 Nó $x_N$

Utilizando a equação (B.2) para o nó  $x_N$ , temos:

$$\frac{\partial^4 v(x_N, t)}{\partial x^4} = \frac{v(x_N + 2h, t) - 4v(x_N + h, t) + 6v(x_N, t) - 4v(x_N - h, t) + v(x_N - 2h, t)}{h^4} \quad (\text{B.18})$$

onde o ponto  $x_N + h$  pode ser substituído pela relação obtida em (B.16). Mas ainda assim, o ponto  $x_{N-1} + 2h$  está fora do intervalo.

Da condição de esforço cortante nulo no ultimo nó, temos

$$\frac{\partial^3 v(x_N, t)}{\partial x^3} = 0 \quad (\text{B.19})$$

Podemos aproximar a terceira derivada no ponto  $x_N$  pela diferença centrada utilizando 5 pontos

$$\frac{v(x_N + 2h, t) - 2v(x_N + h, t) + 2v(x_N - h, t) - v(x_N - 2h, t)}{2h^3} = 0 \quad (\text{B.20})$$

ou seja

$$v(x_N + 2h, t) = 2v(x_N + h, t) - 2v(x_N - h, t) + v(x_N - 2h, t) \quad (\text{B.21})$$

Substituindo (B.16) em (B.21), temos

$$v(x_N + 2h, t) = v(x_N, t) - 4v(x_N - h, t) + 2v(x_N - 2h, t) \quad (\text{B.22})$$

Dessa forma, podemos denotar a quarta derivada em relação ao nó  $x_N$  como

$$\frac{\partial^4 v(x_N, t)}{\partial x^4} = \frac{2v_N - 4v_{N-1} + 2v_{N-2}}{h^4} \quad (\text{B.23})$$

## B.2 Coeficientes de Diferenças Finitas Centrada

Reunindo os coeficientes obtidos nas formas (B.3), (B.5), (B.11), (B.17) e (B.23), podemos reescrever em uma notação mais geral os operadores de diferenças finitas para cada nó, para as condições de contorno do nosso problema.

$$\frac{\partial}{\partial v_p}(D_5^4 v_1) = \begin{cases} 0 & \text{para } p = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{\partial}{\partial v_p}(D_5^4 v_j) = \begin{cases} -4 & \text{para } p = 1 \\ 7 & \text{para } p = 2 \\ -4 & \text{para } p = 3 \\ 1 & \text{para } p = 4 \\ 0 & \text{para } p = 5 \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{\partial}{\partial v_p}(D_5^4 v_j) = \begin{cases} 1 & \text{para } p = j - 2 \\ -4 & \text{para } p = j - 1 \\ 6 & \text{para } p = j \\ -4 & \text{para } p = j + 1 \\ 1 & \text{para } p = j + 2 \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

$$\frac{\partial}{\partial v_p}(D_5^4 v_j) = \begin{cases} 0 & \text{para } p = N - 4 \\ 1 & \text{para } p = N - 3 \\ -4 & \text{para } p = N - 2 \\ 5 & \text{para } p = N - 1 \\ -2 & \text{para } p = N \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{\partial}{\partial v_p}(D_5^4 v_j) = \begin{cases} 0 & \text{para } p = N - 4 \\ 0 & \text{para } p = N - 3 \\ 2 & \text{para } p = N - 2 \\ -4 & \text{para } p = N - 1 \\ 2 & \text{para } p = N \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{cases} D_5^4 f(x_1) & = 0 \\ D_5^4 f(x_2) & = \frac{1}{(\Delta x)^4} \{ -4f_1 + 7f_2 - 4f_3 + f_4 \} \\ D_5^4 f(x_p) & = \frac{1}{(\Delta x)^4} \{ f_{j-2} - 4f_{j-1} + 6f_j - 4f_{j+1} + f_{j+2} \} \\ D_5^4 f(x_{N-1}) & = \frac{1}{(\Delta x)^4} \{ f_{N-3} - 4f_{N-2} + 5f_{N-1} - 2f_N \} \\ D_5^4 f(x_N) & = \frac{1}{(\Delta x)^4} \{ 2f_{N-2} - 4f_{N-1} + 2f_N \} \end{cases} \quad (\text{B.29})$$



## Apêndice C - Modos Assumidos

Uma das maneiras escolhidas para resolver o sistema de equações proposto, foi utilizar o método dos modos assumidos para transformar as EDP's em EDO's. Considera-se que a função de interesse, que a priori é função de varias variáveis, pode ser escrita como produtos de funções que só dependem de uma única variável cada. Dessa forma, os termos referentes a viga serão expandidos da seguinte forma

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(x)q_j(t) \quad (\text{C.1})$$

onde  $\Phi_j$  só depende do deslocamento e  $q_j$  só depende do tempo.  $\Phi_j$  são os modos normais, que para o nosso problema são os modos da uma viga engastada-livre

$$\Phi_j = \cosh(a_j x) - \cos(a_j x) - \alpha_j(\sinh(a_j x) - \sin(a_j x)) \quad (\text{C.2})$$

onde

$$\alpha_j = \frac{\cosh(a_j l) + \cosh(a_j l)}{\sinh(a_j l) + \sin(a_j l)} \quad (\text{C.3})$$

e  $a_j$  representa as frequencias naturais de vibração da viga. Como foi utilizado somente um modo neste trabalho, utilizatemos somente  $a_1 = 1.8780$ . Vale ressaltar que o modo escolhido satisfaz as condições de contorno do problema.

$$\Phi_j(0) = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\Phi_j'(0) = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$\Phi_j''(l) = 0 \quad (\text{C.6})$$

$$\Phi_j'''(l) = 0 \quad (\text{C.7})$$

$$(\text{C.8})$$

Ao aplicar o metodo dos modos assumidos e expandir as equações (2.27), (2.28) e (2.29), aparecem diversas integrais dos modos e seus respectivos produtos com com outras variáveis. Dessa forma, as equações a seguir representam a solução dessas integrais e serão uteis para nas seguintes equações (3.25), (3.26) e (3.27):

$$\int_0^l \Phi(x)dx = -\frac{1}{a} [\alpha \cos(ax) + \alpha \cosh(ax) + \sin(ax) - \sinh(ax)]$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \Phi^2(x)dx &= \frac{1}{4a} [-(\alpha^2 - 1) \sin(2ax) + \alpha^2 \sinh(2ax) + 4(\alpha^2 - 1) \cos(ax) \sinh(ax) \\ &\quad - 4 \sin(ax) ((\alpha^2 + 1) \cosh(ax) - 2\alpha \sinh(ax)) + 2\alpha \cos(2ax) - 2\alpha \cosh(2ax) \\ &\quad + 4ax + \sinh(2ax)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \Phi^2(x)dx &= \frac{1}{60a} [5(3\alpha^2 - 1) \sin(3ax) + 5\alpha(\alpha^2 - 3) \cos(3ax) + 5(3\alpha^2 + 1) \sinh(3ax) \\ &\quad - 5(\alpha^2 + 3)(9\alpha \cosh(ax) + \alpha \cosh(3ax) - 9 \sinh(ax)) \\ &\quad + 18 \cos(2ax) ((1 - 5\alpha^2) \sinh(ax) + \alpha(\alpha^2 + 3) \cosh(ax)) \\ &\quad + 9 \cos(ax) (-\alpha(\alpha^2 - 3)(2 \cosh(2ax) - 5) - 4 \sinh(2ax)) \\ &\quad + 36 \sin(2ax) (\alpha(\alpha^2 - 2) \sinh(ax) + \cosh(ax)) \\ &\quad + 9 \sin(ax) (5(\alpha^2 - 3) + 4\alpha(\alpha^2 + 2) \sinh(2ax) - 2(5\alpha^2 + 1) \cosh(2ax))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^l (r+x)\Phi(x)dx &= \frac{1}{a^2} [\sin(ax)(\alpha - a(r+x)) + \cos(ax)(-a\alpha(r+x) + 1)) \\ &\quad + \sinh(ax)(a(r+x) + \alpha) - \cosh(ax)(a\alpha(r+x) + 1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^l (r+x)\Phi(x)^2dx &= \frac{1}{8a^2} [4a^2x(2r+x) - 2 \sin(2ax) (a(\alpha^2 - 1)(r+x) + \alpha) \\ &\quad + \cos(2ax) (-\alpha^2 + 4a\alpha(r+x) + 1) + 2 \sinh(2ax) (a(\alpha^2 + 1)(r+x) + \alpha) \\ &\quad - \cosh(2ax) (\alpha^2 + 4a\alpha(r+x) + 1) + 8 \cos(ax) \sinh(ax) (a(\alpha^2 - 1)(r+x) + \alpha) \\ &\quad + 8 \cosh(ax) (-\sin(ax) (a(\alpha^2 + 1)(r+x) + \alpha) - \alpha^2 \cos(ax)) \\ &\quad + 8 \sin(ax) \sinh(ax)(2a\alpha(r+x) + 1)] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\int_0^l (r+x)\Phi^3(x)dx &= \frac{1}{900a^2} [25 \cos(3ax) (3\alpha (a (\alpha^2 - 3) (r+x) + \alpha) - 1) \\
&+ 25 \sin(3ax) (-\alpha^3 + 3a (3\alpha^2 - 1) (r+x) + 3\alpha) \\
&+ 25 (27 (\alpha^2 + 3) \sinh(ax)(a(r+x) + \alpha) - 27 (\alpha^2 + 3) \cosh(ax)(a\alpha(r+x) + 1) \\
&- \cosh(3ax) (3\alpha (a (\alpha^2 + 3) (r+x) + \alpha) + 1) \\
&+ \sinh(3ax) (\alpha^3 + 3a (3\alpha^2 + 1) (r+x) + 3\alpha)) \\
&+ 54 \cos(2ax) (\cosh(ax) (5\alpha (a (\alpha^2 + 3) (r+x) + \alpha) + 3) \\
&+ \sinh(ax) (3\alpha^3 - 5a (5\alpha^2 - 1) (r+x) - 11\alpha)) \\
&+ 27 \cos(ax) (-4 \sinh(2ax) (-2\alpha^3 + 5a(r+x) + \alpha) + 25 (\alpha^2 - 3) (a\alpha(r+x) + 1) \\
&+ 2 \cosh(2ax) (-5\alpha^2 - 5a (\alpha^2 - 3) \alpha(r+x) + 3)) \\
&+ 108 \sin(2ax) (\cosh(ax) (-2\alpha^3 + 5a(r+x) - \alpha) \\
&+ \sinh(ax) (5\alpha (a (\alpha^2 - 2) (r+x) + \alpha) - 2)) \\
&+ 27 \sin(ax) (25 (\alpha^2 - 3) (a(r+x) - \alpha) \\
&+ 4 \sinh(2ax) (5\alpha (a (\alpha^2 + 2) (r+x) + \alpha) + 2) \\
&- 2 \cosh(2ax) (3\alpha^3 + 5a (5\alpha^2 + 1) (r+x) + 11\alpha))]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^l (r+x)^2\Phi^2(x)dx &= \frac{1}{24a^3} [8a^3x (3r^2 + 3rx + x^2) \\
&- 3 \sin(2ax) (2a^2 (\alpha^2 - 1) (r+x)^2 - \alpha^2 + 4a\alpha(r+x) + 1) \\
&+ 3 \sinh(2ax) (2a^2 (\alpha^2 + 1) (r+x)^2 + \alpha^2 + 4a\alpha(r+x)) \\
&+ 24 \cos(ax) \sinh(ax) (a^2 (\alpha^2 - 1) (r+x)^2 + \alpha^2 + 2a\alpha(r+x) + 1) \\
&+ 24 \cosh(ax) (-\sin(ax) (a^2 (\alpha^2 + 1) (r+x)^2 - \alpha^2 + 2a\alpha(r+x) + 1) \\
&- 2\alpha \cos(ax)(a\alpha(r+x) + 1)) \\
&+ 6 \cos(2ax) (a(r+x) (-\alpha^2 + 2a\alpha(r+x) + 1) - \alpha) \\
&- 6 \cosh(2ax) (a(r+x) (\alpha^2 + 2a\alpha(r+x) + 1) + \alpha) \\
&+ 48a(r+x) \sin(ax) \sinh(ax)(a\alpha(r+x) + 1) + 3 \sinh(2ax)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^l (r+x)^2 \Phi^3(x) dx = & \frac{1}{13500a^3} [ \\
& 125 \sin(3ax) (9a^2 (3\alpha^2 - 1) (r+x)^2 - 6\alpha^2 - 6a\alpha (\alpha^2 - 3) (r+x) + 2) \\
& + 125 (\sinh(3ax) (9a^2 (3\alpha^2 + 1) (r+x)^2 + 6\alpha^2 + 6a\alpha (\alpha^2 + 3) (r+x) + 2) \\
& - \cosh(3ax) (9a^2 \alpha (\alpha^2 + 3) (r+x)^2 + 2\alpha (\alpha^2 + 3) + 6a (3\alpha^2 + 1) (r+x)) \\
& + 81 (\alpha^2 + 3) \sinh(ax) (a(r+x)(a(r+x) + 2\alpha) + 2) \\
& - 81 (\alpha^2 + 3) \cosh(ax) (a(r+x)(a\alpha(r+x) + 2) + 2\alpha)) \\
& + 81 \sin(ax) (4 \sinh(2ax) (25a^2 \alpha (\alpha^2 + 2) (r+x)^2 + 2\alpha (\alpha^2 + 12) \\
& + 10a (5\alpha^2 + 2) (r+x)) \\
& - 2 \cosh(2ax) (25a^2 (5\alpha^2 + 1) (r+x)^2 + 30\alpha^2 + 10a\alpha (3\alpha^2 + 11) (r+x) + 22) \\
& + 125 (\alpha^2 - 3) (a(r+x)(a(r+x) - 2\alpha) - 2)) \\
& + 125 \cos(3ax) (-2\alpha^3 + 9a^2 (\alpha^2 - 3) \alpha (r+x)^2 + 6a (3\alpha^2 - 1) (r+x) + 6\alpha) \\
& + 162 \cos(2ax) (\sinh(ax) (-25a^2 (5\alpha^2 - 1) (r+x)^2 + 30\alpha^2 \\
& + 10a\alpha (3\alpha^2 - 11) (r+x) - 22) \\
& + \cosh(ax) (-22\alpha^3 + 25a^2 (\alpha^2 + 3) \alpha (r+x)^2 + 10a (5\alpha^2 + 3) (r+x) + 14\alpha)) \\
& - 81 \cos(ax) (4 \sinh(2ax) (25a^2 (r+x)^2 - 20\alpha^2 - 10a\alpha (2\alpha^2 - 1) (r+x) + 2) \\
& + 2 \cosh(2ax) (22\alpha^3 + 25a^2 (\alpha^2 - 3) \alpha (r+x)^2 + 10a (5\alpha^2 - 3) (r+x) + 14\alpha) \\
& - 125 (\alpha^2 - 3) (a(r+x)(a\alpha(r+x) + 2) - 2\alpha)) \\
& + 324 \sin(2ax) (\cosh(ax) (25a^2 (r+x)^2 - 20\alpha^2 - 10a\alpha (2\alpha^2 + 1) (r+x) - 2) \\
& + \sinh(ax) (-2\alpha^3 + 25a^2 (\alpha^2 - 2) \alpha (r+x)^2 + 10a (5\alpha^2 - 2) (r+x) + 24\alpha))]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^l (r+x)^3 \Phi^3(x) dx = & \frac{1}{135000a^4} [-625e^{3ax}(3a(r+x)(3a(r+x)(a(r+x)-1)+2)-2)(\alpha-1)^3 \\
& -50625e^{ax}(a(r+x)(a(r+x)(a(r+x)-3)+6)-6)(\alpha^2+3)(\alpha-1) \\
& -625e^{-3ax}(3a(r+x)(3a(r+x)(a(r+x)+1)+2)+2)(\alpha+1)^3 \\
& +625e^{3iax}(-2i+3a(r+x)(3a(r+x)(i+a(r+x))-2))(-i+\alpha)^3 \\
& +625e^{-3iax}(2i+3a(r+x)(3a(r+x)(-i+a(r+x))-2))(i+\alpha)^3 \\
& -50625e^{-ax}(a(r+x)(a(r+x)(a(r+x)+3)+6)+6)(\alpha+1)(\alpha^2+3) \\
& +81e^{-iax}(i+\alpha)(e^{2ax}(24+7i)(a(1+2i)(r+x)(a^2(4+3i)(r+x)^2 \\
& -(3+6i)a(r+x)+6i)+6)(\alpha-1)^2-(24-7i)\dots \\
& \dots e^{-2ax}(a(2+i)(r+x)(a(2+i)(r+x)(a(2+i)(r+x)+3)+6)+6)(\alpha+1)^2 \\
& +625(6i+a(r+x)(a(r+x)(-3i+a(r+x))-6))(\alpha^2-3)) \\
& +81e^{iax}(e^{2ax}(7+24i)((2+i)a(r+x)(a(2+i)(r+x)((2+i)a(r+x)-3) \\
& +6)-6)(i\alpha+1)(\alpha-1)^2 \\
& +e^{-2ax}(24+7i)(\alpha+1)^2(i\alpha+1)\dots \\
& \dots (6i+(2-i)a(r+x)(6i+(1+2i)a(r+x)(a(2-i)(r+x)+3))) \\
& +625(-6i+a(r+x)(a(r+x)(3i+a(r+x))-6))(-i+\alpha)(\alpha^2-3)) \\
& +162e^{2iax}(-i+\alpha)^2((-144i\alpha+5a(r+x)(5a(r+x)(12i\alpha+5a(r+x)(2i+\alpha) \\
& -9)-6(2i+11\alpha))-42)\cosh(ax)+(6(24i+7\alpha) \\
& -5ia(r+x)(66i-12\alpha+5a(r+x)(9i\alpha+5a(r+x)(-i+2\alpha)+12)))\sinh(ax)) \\
& +162e^{-2iax}(i+\alpha)^2((144i\alpha+5a(r+x)(12i-66\alpha+5a(r+x)\dots \\
& \dots (-12i\alpha+5a(r+x)(-2i+\alpha)-9))-42)\cosh(ax) \\
& +(6(-24i+7\alpha)+5a(r+x)(-12i\alpha+5a(r+x)(12i+9\alpha+5ia(r+x)(i+2\alpha)) \\
& +66))\sinh(ax))]
\end{aligned}$$



## Apêndice D - Runge-Kutta de 4ª Ordem

Para resolver as equações, foi necessário aproximar os operadores de derivação temporal por um método numérico que resolvesse problemas de valor inicial. O método escolhido foi o Runge-Kutta de 4ª ordem explícito, que estima a derivada no próximo instante a partir da inclinação da função no instante atual, utilizando para isso a informação de pontos adjacentes. Dada uma função  $f(x)$  com  $k$  derivadas contínuas no intervalo  $[a, x]$ , podemos expandi-la usando a fórmula de Taylor como

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1!} + \dots + f^k(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + f^{k+1}(c)\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} \quad (\text{D.0})$$

onde  $c \in [a, x]$ .

Dada a forma geral do método

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + h\varphi(x_n, f(x_n); h) \quad (\text{D.0})$$

podemos reescrever (D) como

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{D.0})$$

onde

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, f(x_n)) \\ k_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, f(x_n) + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, f(x_n) + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 = hf(x_n + h, f(x_n) + k_3) \end{cases}$$

Tomando  $k = 4$  em (D), temos

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!}y^{iv}(x_n) + \frac{h^5}{5!}y^v(c) \quad (\text{D.0})$$

e finalmente comparando (D) e (D), vemos que o erro é da ordem de  $y^v(c)\frac{h^5}{5!}$



## Apêndice E - Código em Matlab

Para realizar a implementação numérica do problema, devido a grande quantidade de estruturas, apesar de muitas serem simples, o conjunto ficou complexo. Dessa forma, optou-se por quebrar o problema em várias partes menores, tornando possível testar cada parte isoladamente.

### E.1 Rotina Principal - executa as outras rotinas

```
clc
clear all
close all

tic
[v0,k,passo,n,tempo,Q,R,mh,mv,E,Ih,L,r,alpha,N,delta,p,A,w,w1,zeta,beta,...
    lambda,gama,epsolon,mi,sigma,tau,psi,pf,CL,CD,g,c,v,vp,h,hp,theta,...
    thetap,TSDRE,x1,x2,x3,x4,x5,x6,TamSDRE] = dados;

% Discretização via diferenças finitas
[M] = M(mh,mv,Ih,r,alpha,N,delta,p,A,w);
[K] = K(E,Ih,N,delta,w);
[F] = F(mh,mv,alpha,N,delta,p,A,w,g);

% Runge-Kutta com discretização via diferenças finitas
[tempo,h,hp,theta,thetap,v,vp,TSDRE] = RK(Q,R,passo,n,tempo,r,alpha,N,...
    delta,p,A,w,pf,CL,CD,T,g,c,v,vp,h,hp,theta,thetap,M,K,F,TSDRE);

% Discretização via modos assumidos
[Mam] = Mam(mh,mv,Ih,alpha,p,A,beta,mi,gama,zeta);
[Kam] = Kam(p,A,w1,zeta);
[Fam] = Fam(mh,mv,alpha,p,A,zeta,g);
```

```

% Runge-Kutta com discretização via modos assumidos
[tempo, x1, x2, x3, x4, x5, x6, TamSDRE] = RKam(Q, R, passo, n, tempo, alpha, p, A, ...
    zeta, beta, lambda, gama, epsolon, mi, sigma, tau, psi, pf, CL, CD, g, c, x1, x2, ...
    x3, x4, x5, x6, Mam, Kam, Fam, TamSDRE);

```

```
toc
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Fim do codigo%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

## E.2 Rotina dados - carrega as condições iniciais e de contorno do problema

```

function [v0, k, passo, n, tempo, Q, R, mh, mv, E, Ih, L, r, alpha, N, delta, p, A, w, w1, ...
    zeta, beta, lambda, gama, epsolon, mi, sigma, tau, psi, pf, CL, CD, g, c, v, vp, h, ...
    hp, theta, thetap, TSDRE, x1, x2, x3, x4, x5, x6, TamSDRE] = dados

```

```

v0          = input('Deflexão Inicial da Viga'); % v0=1 é a linha elástica
tempototal  = input('Tempo');                    % tempo de integração
perfil      = input('Perfil Theta');              % perfis de referencia
alpha0      = input('Perfil alpha');              % angulo de ataque inicial
vel         = input('Velocidade');                % velocidade inicial

```

```

k          = 5                ; % 5 nós utilizados para aproxima cada nó
passo      = 0.001            ; % intervalo de integração no tempo
n          = tempototal/passo; % número de iterações no tempo

```

```
% GANHOS DO CONTROLADOR
```

```

Q = 1000*[100, 25000, 100, 1000, 5, 250];
R =      [100, 100, 100, 100, 1, 1];

```

```
% CONSTANTES DA ESTRUTURA/FLUIDO
```

```

base       = 0.025            ; % largura
altura     = base*0.12*(1.3)   ; % espessura
E          = 2.1*10^11         ; % aço
Ih         = ((altura^3)*base)/12 ; % momento de inércia
r          = 0.1                ; % raio do hub
L          = 1                  ; % comprimento da viga
N          = 12                 ; % número de nós
delta      = L/(N-1)           ; % distancia entre os nós
p          = 7860*ones(N, 1)    ; % densidade do aço
pf         = 1.184              ; % densidade do fluido
A          = base*altura*ones(N, 1); % área da seção transversal
mv         = p(1, 1)*A(1, 1)*L ; % massa da viga

```

```

mh      = 1                ; % massa do hub
g       = 9.8              ; % aceleração da gravidade
c       = base             ; % corda aerodinâmica
alpha   = alpha0*(pi/180)  ; % angulo de ataque
CL      = 2*pi*alpha       ; % coeficiente de sustentação
CD      = 1.28*sin(alpha)  ; % coeficiente de arrasto

% PESOS DO OPERADOR INTEGRAL 1/3 Simpson
for j = 1:N
    if j == 1 | j == N
        w(j,1) = 1/3;
    end
    if j >= 2 & j <= N-1
        if mod(j,2) == 1
            w(j,1) = 4/3;
        end
        if mod(j,2) == 0
            w(j,1) = 2/3;
        end
    end
end

% COEFICIENTE MODOS ASSUMIDOS

a1L = 1.8780;
a1  = 1.8780/L;

w1 = ( a1L^2 )*sqrt( E*Ih/( p(1,1)*A(1,1)*( L^4 ) ) ) ;

x    = 0:0.00001:L ;
alfa = ( cosh(a1L) + cos(a1L) ) / ( sinh(a1L) + sin(a1L) ) ;
phi  = x.*( cosh(a1*x) - cos(a1*x) - alfa*( sinh(a1*x) - sin(a1*x) ) ) ;

zeta    = 0.784871;
beta    = 1.004640;
lambda  = 1.487920;
gama    = 0.648644;
epsolon = 0.910690;
mi      = 0.849728;
sigma   = 1.412110;
tau     = 1.363920;
psi     = 1.336020;

% CONDIÇÕES INICIAIS

% variável tempo
tempo(1) = 0;

```



```

% variáveis da discretização via diferenças finitas
h(1)      = 0;
hp(1)     = 0;
theta(1)  = 100*(pi/180);
thetap(1) = 0;

for j = 1:N
    v(j,1) = v0*((g*cos(alpha)*p(1,1)*A(1,1))/(E*Ih))*...
        ( -(L^2)/4)*((j-1)*delta)^2 + (L/6)*((j-1)*delta)^3 - ...
        (1/24)*((j-1)*delta)^4);
    vp(j,1) = 0*((g*cos(alpha)*p(1,1)*A(1,1))/(E*Ih))*...
        ( -(L^2)/2)*((j-1)*delta) + (L/2)*((j-1)*delta)^2 - ...
        (1/6)*((j-1)*delta)^3);
end

% variáveis da discretização via modos assumidos
x1(1) = 0;
x2(1) = 0;
x3(1) = 100*(pi/180);
x4(1) = 0;
x5(1) = v0*((g*cos(alpha)*p(1,1)*A(1,1))/(E*Ih))*...
    ( -(L^2)/4)*(L^2) + (L/6)*(L^3) - (1/24)*(L^4));
x6(1) = 0*((g*cos(alpha)*p(1,1)*A(1,1))/(E*Ih))*...
    ( -(L^2)/2)*L + (L/2)*(L^2) - (1/6)*(L^3));

% PERFIS THETA DE REFERÊNCIA
for i = 1:n

    tempo(i+1) = tempo(i) + passo ;

    if perfil == 0
        U(1,i+1) = 0;
    end
    if perfil == 1
        U(1,i+1) = cos(2*pi*(i/n));
    end
    if perfil == 2
        U(1,i+1) = cos(20*pi*(i/n));
    end
    if perfil == 3
        U(1,i+1) = cos(2*pi*(i/n))*(i/n);
    end
    if perfil == 4
        U(1,i+1) = (i/n)^(-i/n);
    end
    if perfil == 5

```

```

    if i < n/2
        U(1,i+1) = cos(2*pi*(i/n));
    end
    if i >= n/2
        U(1,i+1) = sin(2*pi*(i/n));
    end
end
if perfil == 6
    if i < n/4 | i >= n*(3/4)
        U(1,i+1) = 0;
    end
    if i >= n/4 & i < n*(3/4)
        U(1,i+1) = 1;
    end
end
if perfil == 7
    if i < n/2
        U(1,i+1) = i/n;
    end
    if i >= n/2
        U(1,i+1) = 1 - i/n;
    end
end
if perfil == 8
    if i < n/2
        U(1,i+1) = ((i/n)^2)/2;
    end
    if i >= n/2
        U(1,i+1) = 1-((i/n)^2)/2;
    end
end
if perfil == 9
    U(1,i+1) = cos(i/n);
end
if perfil == 10
    U(1,i+1) = vel*tempo(i);
    Up(1,i+1) = vel;
end
end

% REFERÊNCIAS PARA O CONTROLADOR
TSDRE = zeros(2*N+2,n+1);
TamSDRE = zeros(6,n+1);
TSDRE(3,:) = U(1,:);
TSDRE(4,:) = Up(1,:);
TamSDRE(3,:) = U(1,:);
TamSDRE(4,:) = Up(1,:);

```

```
save U1.mat U
save Up1.mat Up
```

### E.3 Rotina M - discretiza a matriz de massa via diferenças finitas

```
function [M] = M(mh,mv,Ih,r,alpha,N,delta,p,A,w)
M44 = 0;
for j = 1:2*N
    if mod(j,2) == 1
        M(j+2,j+2) = 1;
    end
    if mod(j,2) == 0
        M44 = M44 + ((r + ((j/2) - 1)*delta)^2)*w(j/2)*delta;
        if j >= 3
            M(2,j+2) = p(j/2)*A(j/2)*cos(alpha)*w(j/2)*delta;
            M(4,j+2) = -p(j/2)*A(j/2)*(r + ((j/2) - 1)*delta)*...
                sin(alpha)*w(j/2)*delta;
            M(j+2,2) = p(j/2)*A(j/2)*cos(alpha)*w(j/2)*delta;
            M(j+2,4) = -p(j/2)*A(j/2)*(r + ((j/2) - 1)*delta)*...
                sin(alpha)*w(j/2)*delta;
            M(j+2,j+2) = p(j/2)*A(j/2)*w(j/2)*delta;
        end
    end
end

M(1,1) = 1;
M(2,2) = mh + mv;
M(3,3) = 1;
M(4,4) = Ih + M44;

end
```

### E.4 Rotina K - discretiza a matriz de rigidez via diferenças finitas

```
function [K] = K(E,Ih,N,delta,w)

D4n = D4(N,delta);

Wn = W(w,delta,N);
```

```

EIn = EI(E,Ih,N);

Kt = Wn*(D4n*EIn);

K(1,2) = -1;
K(3,4) = -1;
for j = 3:2*N
    for i = 3:2*N
        if mod(j,2) == 0 && mod(i,2) == 0
            K(j+2,i+1) = Kt(j/2,i/2); % termo inferior da diagonal principal
            if i == j
                K(j+1,i+2) = -1; % termo superior da diagonal principal
            end
        end
    end
end
end
end
end

```

## E.5 Rotina D4 - constroe o operador de diferenciação de 4<sup>a</sup> ordem

```

function [D4] = D4(N,delta)

for j = 1:N

    if j == 1

        D4(j,j) = 0 ;
        D4(j,j+1) = 0 ;
        D4(j,j+2) = 0 ;
        D4(j,j+3) = 0 ;
        D4(j,j+4) = 0 ;

    end

    if j == 2

        D4(j,j-1) = -4 ;
        D4(j,j) = 7 ;
        D4(j,j+1) = -4 ;
        D4(j,j+2) = 1 ;
        D4(j,j+3) = 0 ;
    end
end

```

```

end

if j >= 3 && j <= N-2

    D4(j, j-2) = 1 ;
    D4(j, j-1) = -4 ;
    D4(j, j)   = 6 ;
    D4(j, j+1) = -4 ;
    D4(j, j+2) = 1 ;

end

if j == N-1

    D4(j, j-3) = 0 ;
    D4(j, j-2) = 1 ;
    D4(j, j-1) = -4 ;
    D4(j, j)   = 5 ;
    D4(j, j+1) = -2 ;

end

if j == N

    D4(j, j-4) = 0 ;
    D4(j, j-3) = 0 ;
    D4(j, j-2) = 2 ;
    D4(j, j-1) = -4 ;
    D4(j, j)   = 2 ;

end

end

D4 = D4/(delta^4);

end

```

## E.6 Rotina W - constroe o operador de integração de Simpson

```
function [W] = W(w,delta,N)
```

```

for j = 1:N
    W(j,j) = delta*w(j);
end
end

```

## E.7 Rotina EI - constroe a matriz diagonal E\*I

```

function [EI] = EI(E,Ih,N)
for j = 1:N
    EI(j,j) = E*Ih;
end
end

```

## E.8 Rotina F - discretiza o vetor de forças via diferenças finitas

```

function [F] = F(mh,mv,alpha,N,delta,p,A,w,g)
F(2,1) = mh*g + mv*g;
for j = 5:2*N
    if mod(j,2) == 0
        F(j+2,1) = p(j/2)*A(j/2)*w(j/2)*delta*g*cos(alpha);
    end
end
end

```

## E.9 Rotina RK - aplica o método de Runge-Kutta na discretização via diferenças finitas

```

function [tempo,h,hp,theta,thetap,v,vp,TSDRE] = RK(Q,R,passo,n,tempo,r,...
alpha,N,delta,p,A,w,pf,CL,CD,T,g,c,v,vp,h,hp,theta,thetap,M,K,F,TSDRE)

```

```

% Mapa do algoritmo
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Repetir 4x %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Atualização da parte dinâmica da matriz de massa - elemento M(4,4)
% Atualização da parte dinâmica do vetor de força - elemento F(h),F(theta)
% e Fj(v)
% Desacoplamento do sistema de equações
% Cálculo dos ganhos k
% Atualização das variáveis de estado
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Método de Runge-Kutta
% Plot dinâmico da deflexão da viga

controle = 1;

for j = 1:2*N+2
    if j == 1
        RSDRE(j,j) = R(1);
        QSDRE(j,j) = Q(1);
    end
    if j == 2
        RSDRE(j,j) = R(2);
        QSDRE(j,j) = Q(2);
    end
    if j == 3
        RSDRE(j,j) = R(3);
        QSDRE(j,j) = Q(3);
    end
    if j == 4
        RSDRE(j,j) = R(4);
        QSDRE(j,j) = Q(4);
    end
    if j >=5
        if mod(j,2) == 1
            RSDRE(j,j) = R(5);
            QSDRE(j,j) = Q(5);
        end
        if mod(j,2) == 0
            RSDRE(j,j) = R(6);
            QSDRE(j,j) = Q(6);
        end
    end
end

B = zeros(2*N+2,2*N+2);
B(2,2) = 1;

```

```

B(4,4) = 1;
NSDRE = zeros(2*N+2,2*N+2);

ref = TSDRE;

for i = 1:n

Ktempo = K;

    for l = 1:4

        M44tempo = 0;

        for j = 1:2*N
            if mod(j,2) == 0
                M44tempo = M44tempo + (v(j/2,i)^2) * (sin(alpha)^2) * w(j/2) * ...
                    delta;
            end
        end

        Mtempo = M;

        Mtempo(4,4) = M(4,4) + M44tempo;

        Ftempo = zeros(2*(N+1),2*(N+1));
        Fhtempo = 0;
        Fthetatempo = 0;

        for j = 1:2*N
            if mod(j,2) == 0
                Fhtempo = Fhtempo - ((pf*c)/2) * ( (thetap(1,i)*...
                    (r + ((j/2) - 1)*delta) - vp(j/2,i)*sin(alpha))^2) + ...
                    ((vp(j/2,i)*cos(alpha) + hp(1,i))^2) ) * CL * w(j/2) * delta;

                Fthetatempo = Fthetatempo + (2*p(j/2)*A(j/2)*w(j/2)*...
                    v(j/2,i)*vp(j/2,i)) * ((sin(alpha))^2) * thetap(1,i) * ...
                    delta - T + ((pf*c)/2) * ( (thetap(1,i)*...
                    (r + ((j/2) - 1)*delta) - vp(j/2,i)*sin(alpha))^2) + ...
                    ((vp(j/2,i)*cos(alpha) + hp(1,i))^2) ) * ...
                    (r + ((j/2) - 1)*delta) * sin(alpha) * CD * w(j/2) * delta;

                if j > 3
                    Ftempo(j+2,3) = F(j+2,1) - p(j/2)*A(j/2)*w(j/2)*...
                        delta * ( v(j/2,i) * ((sin(alpha))^2) * ...
                            ((thetap(1,i))^2) - g*cos(alpha) ) - ...
                            ((pf*c)/2) * ( (thetap(1,i) * (r + ((j/2) - 1)*delta) ...
                                - vp(j/2,i)*sin(alpha))^2) + ...

```



```

((vp(j/2,i)*cos(alpha) + hp(1,i))^2 )*...
(CL*cos(alpha) + CD*((sin(alpha))^2))*w(j/2)*delta;
    end
end
end

Ftempo(2,3) = F(2,1) + Fhtempo;
Ftempo(4,3) = F(4,1) + Fthetatempo;

for j = 1:2*(N+1)
    if j == 1
        s(j,i) = h(1,i);
        sref(j,i) = h(1,i) - ref(j,i);
    end
    if j == 2
        s(j,i) = hp(1,i);
        sref(j,i) = hp(1,i) - ref(j,i);
    end
    if j == 3
        s(j,i) = theta(1,i);
        sref(j,i) = theta(1,i) - ref(j,i);
    end
    if j == 4
        s(j,i) = thetap(1,i);
        sref(j,i) = thetap(1,i) - ref(j,i);
    end
    if j >= 5
        if mod(j,2) == 1
            s(j,i) = v((j-1)/2,i);
            sref(j,i) = v((j-1)/2,i) - ref(j,i);
        end
        if mod(j,2) == 0
            s(j,i) = vp((j-2)/2,i);
            sref(j,i) = vp((j-2)/2,i) - ref(j,i);
        end
    end
end

Ftempo = Ftempo/theta(i);

ASDRE = Mtempo\(-Ktempo - Ftempo);
BSDRE = Mtempo\B;

if controle == 1
    PSDRE = lqr(ASDRE,BSDRE,QSDRE,RSDRE,NSDRE);

    TSDRE(:,i+1) = (-RSDRE\((BSDRE')*PSDRE))*sref(:,i);
end

```

```

end

spp(:,i) = ASDRE*s(:,i) + BSDRE*TSDRE(:,i+1);

if l == 1
    for j = 1:2*(N+1)
        k1(j) = passo*( spp(j,i) );
    end
    for j = 1:2*(N+1)
        if j == 1
            h(1,i) = h(1,i) + k1(1)/2;
        end
        if j == 2
            hp(1,i) = hp(1,i) + k1(2)/2;
        end
        if j == 3
            theta(1,i) = theta(1,i) + k1(3)/2;
        end
        if j == 4
            thetap(1,i) = thetap(1,i) + k1(4)/2;
        end
        if j >=5
            if mod(j,2) == 1
                v((j-1)/2,i) = v((j-1)/2,i) + k1(j)/2;
            end
            if mod(j,2) == 0
                vp((j-2)/2,i) = vp((j-2)/2,i) + k1(j)/2;
            end
        end
    end
end

if l == 2
    for j = 1:2*(N+1)
        k2(j) = passo*( spp(j,i) );
    end
    for j = 1:2*(N+1)
        if j == 1
            h(1,i) = h(1,i) - k1(1)/2 + k2(1)/2;
        end
        if j == 2
            hp(1,i) = hp(1,i) - k1(2)/2 + k2(2)/2;
        end
        if j == 3
            theta(1,i) = theta(1,i) - k1(3)/2 + k2(3)/2;
        end
        if j == 4
            thetap(1,i) = thetap(1,i) - k1(4)/2 + k2(4)/2;
        end
    end
end

```

```

end
if j >=5
    if mod(j,2) == 1
        v((j-1)/2,i) = v((j-1)/2,i) - k1(j)/2 + k2(j)/2;
    end
    if mod(j,2) == 0
        vp((j-2)/2,i) = vp((j-2)/2,i) - k1(j)/2 + k2(j)/2;
    end
end
end
end
if l == 3
    for j = 1:2*(N+1)
        k3(j) = passo*( spp(j,i) );
    end
    for j = 1:2*(N+1)
        if j == 1
            h(1,i) = h(1,i) - k2(1)/2 + k3(1);
        end
        if j == 2
            hp(1,i) = hp(1,i) - k2(2)/2 + k3(2);
        end
        if j == 3
            theta(1,i) = theta(1,i) - k2(3)/2 + k3(3);
        end
        if j == 4
            thetap(1,i) = thetap(1,i) - k2(4)/2 + k3(4);
        end
    end
    if j >=5
        if mod(j,2) == 1
            v((j-1)/2,i) = v((j-1)/2,i) - k2(j)/2 + k3(j);
        end
        if mod(j,2) == 0
            vp((j-2)/2,i) = vp((j-2)/2,i) - k2(j)/2 + k3(j);
        end
    end
end
end
end
if l == 4
    for j = 1:2*(N+1)
        k4(j) = passo*( spp(j,i) );
    end
    for j = 1:2*(N+1)
        if j == 1
            h(1,i) = h(1,i) - k3(1);
        end
        if j == 2

```

```

        hp(1,i) = hp(1,i) - k3(2);
    end
    if j == 3
        theta(1,i) = theta(1,i) - k3(3);
    end
    if j == 4
        thetap(1,i) = thetap(1,i) - k3(4);
    end
    if j >=5
        if mod(j,2) == 1
            v((j-1)/2,i) = v((j-1)/2,i) - k3(j);
        end
        if mod(j,2) == 0
            vp((j-2)/2,i) = vp((j-2)/2,i) - k3(j);
        end
    end
end
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Método de Runge-Kutta RK45%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

h(1,i+1) = h(1,i) + ( k1(1) + 2*k2(1) + 2*k3(1) + k4(1) )/6;
hp(1,i+1) = hp(1,i) + ( k1(2) + 2*k2(2) + 2*k3(2) + k4(2) )/6;
theta(1,i+1) = theta(1,i) + ( k1(3) + 2*k2(3) + 2*k3(3) + k4(3) )/6;
thetap(1,i+1) = thetap(1,i) + ( k1(4) + 2*k2(4) + 2*k3(4) + k4(4) )/6;
for j = 5:2*N+2
    if mod(j,2) == 1
        v((j-1)/2,i+1) = v((j-1)/2,i) + ( k1(j) + 2*k2(j) + ...
            2*k3(j) + k4(j) )/6;
    end
    if mod(j,2) == 0
        vp((j-2)/2,i+1) = vp((j-2)/2,i) + ( k1(j) + 2*k2(j) + ...
            2*k3(j) + k4(j) )/6;
    end
end
end

if mod(i,100) == 0
%     figure(1)
%     subplot(2,1,1)
%     plot(v(:,i));
    i
end
end

```

```

end

save tempo.mat tempo
save h1.mat h
save hp1.mat hp
save theta1.mat theta
save thetap1.mat thetap
save v1.mat v
save vp1.mat vp
save TSDRE1.mat TSDRE

end

```

## E.10 Rotina M - discretiza a matriz de massa via modos assumidos

```

function [Mam] = Mam(mh,mv,Ih,alpha,p,A,beta,mi,gama,zeta)

m22 = mh + mv ;
m26 = p(1,1)*A(1,1)*cos(alpha)*zeta;
m44 = Ih + mi ;
m46 = -p(1,1)*A(1,1)*sin(alpha)*gama;
m62 = p(1,1)*A(1,1)*cos(alpha)*zeta;
m64 = -p(1,1)*A(1,1)*sin(alpha)*gama;
m66 = p(1,1)*A(1,1)*beta ;

Mam = [ 1, 0 , 0 , 0 , 0 , 0
        0, m22 , 0 , 0 , 0 , m26
        0, 0 , 1 , 0 , 0 , 0
        0, 0 , 0 , m44 , 0 , m46
        0, 0 , 0 , 0 , 1 , 0
        0, m62 , 0 , m64 , 0 , m66 ];

end

```

## E.11 Rotina K - discretiza a matriz de rigidez via modos assumidos

```

function [Kam] = Kam(p,A,w1,zeta)

k65 = p(1,1)*A(1,1)*(w1^2)*zeta;

```

```

Kam = [0 , -1 , 0 , 0 , 0 , 0
       0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0
       0 , 0 , 0 , -1 , 0 , 0
       0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0
       0 , 0 , 0 , 0 , 0 , -1
       0 , 0 , 0 , 0 , k65 , 0 ];

```

```
end
```

## E.12 Rotina F - discretiza o vetor de forças via modos assumidos

```
function [Fam] = Fam(mh,mv,alpha,p,A,zeta,g)
```

```
Fam(2,1) = ((mh + mv)*g);
```

```
Fam(6,1) = p(1,1)*A(1,1)*g*cos(alpha)*zeta;
```

```
end
```

## E.13 Rotina RK - aplica o método de Runge-Kutta na discretização via modos assumidos

```
function [tempo,x1,x2,x3,x4,x5,x6,TamSDRE] = RKam(Q,R,passo,n,tempo,...
```

```
alpha,p,A,zeta,beta,lambda,gama,epsolon,mi,sigma,tau,psi,pf,CL,CD,g,...
```

```
c,x1,x2,x3,x4,x5,x6,Mam,Kam,Fam,TamSDRE)
```

```
% Mapa do algoritmo
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Repetir 4x %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Atualização da parte dinâmica da matriz de massa - elemento Mam(4,4)
```

```
% Atualização da parte dinâmica do vetor de força - elemento Fam(h),
```

```
% Fam(theta) e Fam(q)
```

```
% Desacoplamento do sistema de equações
```

```
% Cálculo dos ganhos k
```

```
% Atualização das variáveis de estado
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Método de Runge-Kutta
```

```
controleam = 1;
```

```
RamSDRE = [R(1),0 ,0 ,0 ,0 ,0
```

```

0 ,R(2),0 ,0 ,0 , 0
0 ,0 ,R(3),0 ,0 , 0
0 ,0 ,0 ,R(4),0 , 0
0 ,0 ,0 ,0 ,R(5), 0
0 ,0 ,0 ,0 ,0 , R(6)];

QamSDRE = [Q(1),0 ,0 ,0 ,0 , 0
0 ,Q(2),0 ,0 ,0 , 0
0 ,0 ,Q(3),0 ,0 , 0
0 ,0 ,0 ,Q(4),0 , 0
0 ,0 ,0 ,0 ,Q(5), 0
0 ,0 ,0 ,0 ,0 , Q(6)];

Bam = [0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0
0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0];

NamSDRE = zeros(6,6);

refam = TamSDRE;

for i = 1:n

    tempo(i+1) = tempo(i) + passo;

Kamtempo = Kam;

for l = 1:4

    Mam44tempo = (x5(1,i)^2)*(sin(alpha)^2)*beta;

    Mamtempo = Mam;

    Mamtempo(4,4) = Mam(4,4) + Mam44tempo;

    Famhtempo = -((pf*c)/(2*zeta))*( (x4(1,i))^2)*mi + ...
        ((x6(1,i))^2)*beta - 2*x4(1,i)*x6(1,i)*sin(alpha)*epsolon + ...
        (x2(1,i))^2 + 2*x6(1,i)*cos(alpha)*x2(1,i)*zeta )*CL;
    Famthetatempo = p(1,1)*A(1,1)*2*x4(1,i)*x6(1,i)*x5(1,i)*...
        ((sin(alpha))^2)*beta + ((pf*c)/2)*( (x4(1,i))^2)*psi + ...
        ((x6(1,i))^2)*sigma - 2*x4(1,i)*x6(1,i)*sin(alpha)*tau + ...
        ((x2(1,i))^2)*gama + 2*x6(1,i)*cos(alpha)*x2(1,i)*epsolon )*...
        sin(alpha)*CD;
    Famqtempo = -p(1,1)*A(1,1)*( (x4(i))^2)*x5(1,i)*...

```

```

((sin(alpha))^2 - g*cos(alpha) ) * zeta - ((pf*c)/2) * ...
( ((x4(1,i))^2) * mi + ((x6(1,i))^2) * beta - 2*x4(1,i) * x6(1,i) * ...
sin(alpha) * epsolon + (x2(1,i))^2 + 2*x6(1,i) * cos(alpha) * ...
x2(1,i) * zeta ) * (CL*cos(alpha) + CD*((sin(alpha))^2));

Famtempo          = zeros(6,6);
Famtempo(:,1) = Fam;

Famtempo(2,3) = Fam(2,1) + Famhtempo      ;
Famtempo(4,3) = Fam(4,1) + Famthetatempo;
Famtempo(6,3) = Fam(6,1) + Famqtempo     ;

sam(1,i) = x1(1,i);
sam(2,i) = x2(1,i);
sam(3,i) = x3(1,i);
sam(4,i) = x4(1,i);
sam(5,i) = x5(1,i);
sam(6,i) = x6(1,i);

samref(1,i) = x1(1,i) - refam(1,i);
samref(2,i) = x2(1,i) - refam(2,i);
samref(3,i) = x3(1,i) - refam(3,i);
samref(4,i) = x4(1,i) - refam(4,i);
samref(5,i) = x5(1,i) - refam(5,i);
samref(6,i) = x6(1,i) - refam(6,i);

Famtempo = Famtempo/x3(i);

AamSDRE = Mamtempo \ ( -Kamtempo - Famtempo );
BamSDRE = Mamtempo \ Bam;

if controleam == 1
    PamSDRE = lqr(AamSDRE, BamSDRE, QamSDRE, RamSDRE, NamSDRE);

    TamSDRE(:,i+1) = (-RamSDRE \ ((BamSDRE') * PamSDRE)) * samref(:,i);
end

sampp(:,i) = AamSDRE * sam(:,i) + BamSDRE * TamSDRE(:,i+1);

if l == 1

    for j = 1:6
        k1(j) = passo * ( sampp(j,i) );
    end

    x1(1,i) = x1(1,i) + k1(1)/2;
    x2(1,i) = x2(1,i) + k1(2)/2;

```



```

x3(1,i) = x3(1,i) + k1(3)/2;
x4(1,i) = x4(1,i) + k1(4)/2;
x5(1,i) = x5(1,i) + k1(5)/2;
x6(1,i) = x6(1,i) + k1(6)/2;
end

if l == 2
    for j = 1:6
        k2(j) = passo*( sampp(j,i) );
    end

x1(1,i) = x1(1,i) - k1(1)/2 + k2(1)/2;
x2(1,i) = x2(1,i) - k1(2)/2 + k2(2)/2;
x3(1,i) = x3(1,i) - k1(3)/2 + k2(3)/2;
x4(1,i) = x4(1,i) - k1(4)/2 + k2(4)/2;
x5(1,i) = x5(1,i) - k1(5)/2 + k2(5)/2;
x6(1,i) = x6(1,i) - k1(6)/2 + k2(6)/2;
end

if l == 3
    for j = 1:6
        k3(j) = passo*( sampp(j,i) );
    end

x1(1,i) = x1(1,i) - k2(1)/2 + k3(1);
x2(1,i) = x2(1,i) - k2(2)/2 + k3(2);
x3(1,i) = x3(1,i) - k2(3)/2 + k3(3);
x4(1,i) = x4(1,i) - k2(4)/2 + k3(4);
x5(1,i) = x5(1,i) - k2(5)/2 + k3(5);
x6(1,i) = x6(1,i) - k2(6)/2 + k3(6);
end

if l == 4
    for j = 1:6
        k4(j) = passo*( sampp(j,i) );
    end

x1(1,i) = x1(1,i) - k3(1);
x2(1,i) = x2(1,i) - k3(2);
x3(1,i) = x3(1,i) - k3(3);
x4(1,i) = x4(1,i) - k3(4);
x5(1,i) = x5(1,i) - k3(5);
x6(1,i) = x6(1,i) - k3(6);
end

end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Método de Runge-Kutta RK45%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

x1(1,i+1) = x1(1,i) + ( k1(1) + 2*k2(1) + 2*k3(1) + k4(1) )/6;
x2(1,i+1) = x2(1,i) + ( k1(2) + 2*k2(2) + 2*k3(2) + k4(2) )/6;
x3(1,i+1) = x3(1,i) + ( k1(3) + 2*k2(3) + 2*k3(3) + k4(3) )/6;
x4(1,i+1) = x4(1,i) + ( k1(4) + 2*k2(4) + 2*k3(4) + k4(4) )/6;
x5(1,i+1) = x5(1,i) + ( k1(5) + 2*k2(5) + 2*k3(5) + k4(5) )/6;
x6(1,i+1) = x6(1,i) + ( k1(6) + 2*k2(6) + 2*k3(6) + k4(6) )/6;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if mod(i,100) == 0
%   figure(1)
%   subplot(1,2,2)
%   plot(q(:,i));
    i
end

end

save x11.mat x1
save x21.mat x2
save x31.mat x3
save x41.mat x4
save x51.mat x5
save x61.mat x6
save TamSDRE1.mat TamSDRE

end

```