Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas	
Campus	Manaus - Distrito Industrial
Curso	Bacharelado em Engenharia de Computação
Disciplina	ECP12 - Cálculo Diferencial e Integral I
Docente	Eduardo Palhares Júnior

Lista 0: Revisão de álgebra e funções

Manipulação Algébrica e Equações

1. O estudo de polinômios é a base para a manipulação de muitas funções em Cálculo. Sabendo que $x = 1$ é uma das raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$, encontre as outras raízes e fatore $P(x)$ completamente.

2. A simplificação de expressões é fundamental antes de se aplicar conceitos como limites. Simplifique ao máximo a seguinte expressão racional, indicando as restrições sobre a variável x:
$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x - 3}$$

3. Muitas vezes, em engenharia, o interesse não está na solução exata, mas na existência e na natureza dela. Considere a equação $mx^2 + 6x + 3 = 0$, onde m é uma constante real. Sem resolver a equação, determine os valores de m para os quais a equação:
   (a) Possui duas raízes reais e distintas.
   (b) Possui exatamente uma raiz real.
   (c) Não possui raízes reais.

4. A formulação de problemas em termos matemáticos é uma habilidade central na engenharia. O projeto de um data center prevê uma sala de servidores retangular com área de 120 m². Por restrições de cabeamento, o comprimento da sala deve ser 7 metros maior que a sua largura. Determine as dimensões (comprimento e largura) da sala.

Inequações e Intervalos

5. A resolução de inequações-quociente é crucial para determinar o domínio de funções e analisar seus sinais. Resolva a seguinte inequação e apresente a solução em notação de intervalo:
$$\frac{x^2 - 3x - 10}{8 - x} \geq 0$$

6. Inequações modulares são frequentes em problemas de engenharia que envolvem tolerâncias e margens de erro. Encontre o conjunto solução da inequação:

$$|2x - 5| > 3$$

7. A análise gráfica é uma forma poderosa de interpretar desigualdades. Considere as funções $f(x) = |x - 2|$ e $g(x) = \frac{x}{2} + 1$.
   (a) Esboce o gráfico de ambas as funções no mesmo sistema de coordenadas.
   (b) Usando o seu gráfico, identifique visualmente os intervalos de x para os quais $f(x) < g(x)$.

8. O domínio de uma função é o conjunto de todos os valores de entrada para os quais a função produz uma saída real. Em engenharia, o domínio define as condições operacionais seguras de um sistema. Determine o domínio da função:

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$$

   Apresente a resposta em notação de intervalo.

Funções, Domínio e Gráficos

9. A composição de funções é uma operação fundamental para construir funções mais complexas, e sua compreensão é essencial para a Regra da Cadeia em derivação. Dadas as funções $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = x^2 - 1$, determine:
   (a) A expressão para a função composta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ e seu respectivo domínio.
   (b) O valor de $(g \circ f)(15)$.

10. A função inversa "desfaz" o que a função original faz, um conceito importante em logaritmos, exponenciais e funções trigonométricas inversas. Determine a função inversa $f^{-1}(x)$ da função $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$.

11. A análise de simetria de uma função pode simplificar cálculos, especialmente em integrais definidas. Determine se as seguintes funções são pares, ímpares ou nenhuma das duas. Justifique sua resposta algebricamente.
   (a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$
   (b) $g(x) = \frac{\sin(x)}{x^3}$
   (c) $h(x) = x^3 - 2x^2$

12. Compreender transformações de gráficos permite esboçar funções complexas a partir de funções mais simples. O gráfico da função $f(x)$ é dado abaixo. Esboce o gráfico da função transformada $g(x) = -f(x-2) + 1$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ -2x + 2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

13. Funções definidas por partes são excelentes para modelar situações que mudam de comportamento. Uma empresa de telefonia cobra uma assinatura mensal de R$ 40,00 que dá direito a 200 minutos de ligação. Se o cliente exceder os 200 minutos, cada minuto adicional custa R$ 0,30.
    (a) Escreva uma função $C(m)$ que represente o custo mensal em função do número de minutos m utilizados.
    (b) Calcule o custo para um cliente que utilizou 350 minutos em um mês.
14. Em projetos de engenharia, é comum expressar uma quantidade em função de outra para fins de otimização. Um fazendeiro quer construir um cercado retangular e dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados. Ele dispõe de 600 metros de cerca no total.
    (a) Expresse a área total A do cercado como uma função de uma de suas dimensões (por exemplo, a largura x).
    (b) Determine o domínio da função Área no contexto deste problema.

Funções Essenciais

15. O domínio de funções logarítmicas é uma fonte comum de erros. Resolva a seguinte equação logarítmica, lembrando-se de verificar as condições de existência das soluções:

$$\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$$

16. A resolução de equações trigonométricas exige o conhecimento do círculo trigonométrico e das periodicidades. Encontre todas as soluções da equação $2\cos^2(\theta) - 1 = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$.
17. A "grandeza" de um infinito não é sempre a mesma. Use seu conhecimento sobre o comportamento de funções para comparar o crescimento das seguintes funções quando $x \to \infty$. Coloque-as em ordem, da que cresce mais lentamente para a que cresce mais rapidamente:

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = e^x \qquad h(x) = \ln(x) \qquad k(x) = \sqrt{x}$$

18. A amplitude, o período e a fase são parâmetros que descrevem oscilações em sistemas físicos. Dada a função $f(t) = -10\cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 5$, identifique:
    (a) A amplitude da oscilação.
    (b) O período da função.
    (c) O deslocamento de fase.
    (d) O deslocamento vertical.
19. O decaimento radioativo é modelado por uma função exponencial. A meia-vida do Césio-137 é de aproximadamente 30 anos. Se um laboratório possui uma amostra inicial de 200 gramas de Césio-137:

(a) Determine a função $M(t)$ que descreve a massa restante da amostra após t anos.

(b) Qual será a massa restante após 90 anos?

20. Em Manaus, a duração do dia (horas de luz solar) varia muito pouco ao longo do ano, mas em cidades de alta latitude essa variação é grande e pode ser modelada por uma função senoidal. Em uma cidade no hemisfério norte, a duração do dia, $D(t)$, em horas, pode ser modelada pela função:

$$D(t) = 12 + 4\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 81)\right)$$

onde t é o número de dias desde o início do ano ($t = 1$ para $1^{\underline{o}}$ de janeiro).

(a) Qual a duração do dia mais longo e do dia mais curto do ano?

(b) Qual a duração do dia em $t = 172$ (aproximadamente o solstício de verão)?

Bons Estudos!!!