Universidade Federal do ABC (UFABC)
Centro de Matemática, Computação e Cognição(CMCC)
Curso de Licenciatura em Matemática

Plano de Aula

Dados de Identificação	
Professores:	Eduardo Palhares Júnior
Disciplina:	Matemática
Tema:	O Estudo das Relações Algébricas
Turma:	1º Periodo
Data:	28/05/2014
Duração da aula:	2 horas/aula

1 Objetivos

1.1 Geral

Estudar aspectos conceituais e técnicos relacionados a polinômios e suas raízes.

1.2 Específicos

- Abstrair a generalização de um polinômio de grau n;
- Compreender a estrutura das raízes em um polinômio geral;

2 Conteúdos

- Teorema Fundamental da Álgebra;
- Decomposição de um polinômio em fatores de 1° grau;
- Relações de Girard;

3 Procedimentos metodológicos

- Apresentação expositiva e dialogada dos principais conceitos
- Resolução de exemplos com participação dos alunos

4 Recursos didáticos

- Quadro, giz.

5 Avaliação

- Participação na solução de exemplos
- Resolução de exercícios

Referências

[1] BARRETO FILHO, Benigno e da SILVA, Claudio Xavier **Matemática** Programa Livro na Escola. FTD, Minas Gerais, 2005.

Anexo A - Relações de Girard

Relações de Girard de ordem 2

Seja a equação do 2° $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$, cujas raizes são x_1 e x_2.

Decompondo em fatores do 1° grau:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c =& a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) \\
& \text{expandindo os termos} \\
ax^2 + bx + c =& a\left[x^2 - \left(x_1 + x_2\right)x + x_1.x_2\right] \\
& \text{dividindo por } a \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} =& \left[x^2 - \left(x_1 + x_2\right)x + x_1.x_2\right]
\end{aligned}$$

Pela "Identidade de Polinômios", temos:

$$\begin{cases}
-\dfrac{b}{a} = & x_1 + x_2 \\
\dfrac{c}{a} = & x_1.x_2
\end{cases}$$

Relações de Girard de ordem 3

Seja a equação do 3° $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, onde $a \neq 0$, cujas raizes são x_1, x_2 e x_3.

Decompondo em fatores do 1° grau:

$$\begin{aligned}
ax^3 + bx^2 + cx + d =& a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\left(x - x_3\right) \\
& \text{expandindo os termos} \\
ax^3 + bx^2 + cx + d =& a\left[x^3 - \left(x_1 + x_2 + x_3\right)x^2 + \left(x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3\right)x - x_1.x_2.x_3\right] \\
& \text{dividindo por } a \\
x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} =& \left[x^3 - \left(x_1 + x_2 + x_3\right)x^2 + \left(x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3\right)x - x_1.x_2.x_3\right]
\end{aligned}$$

Pela "Identidade de Polinômios", temos:

$$\begin{cases}
-\dfrac{b}{a} = & x_1 + x_2 + x_3 \\
\dfrac{c}{a} = & x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 \\
-\dfrac{d}{a} = & x_1.x_2.x_3
\end{cases}$$

Relações de Girard de ordem 4

Seja a equação do 4° $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, onde $a \neq 0$, cujas raizes são x_1, x_2, x_3 e x_4.

Decompondo em fatores do 1° grau:

$$\begin{aligned}
ax^4+bx^3+cx^2+dx+e =& a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)\\
&\text{expandindo os termos}\\
ax^4+bx^3+cx^2+dx+e =& a\left[x^4-\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)x^3+\right.\\
&\left(x_1.x_2+x_1.x_3+x_1.x_4+x_2.x_3+x_2.x_4+x_3.x_4\right)x^2-\\
&\left.\left(x_1.x_2.x_3+x_1.x_2.x_4+x_1.x_3.x_4+x_2.x_3.x_4\right)x+x_1.x_2.x_3.x_4\right]\\
&\text{dividindo por } a\\
x^4+\frac{b}{a}x^3+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a} =& \left[x^4-\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)x^3+\right.\\
&\left(x_1.x_2+x_1.x_3+x_1.x_4+x_2.x_3+x_2.x_4+x_3.x_4\right)x^2-\\
&\left.\left(x_1.x_2.x_3+x_1.x_2.x_4+x_1.x_3.x_4+x_2.x_3.x_4\right)x+x_1.x_2.x_3.x_4\right]
\end{aligned}$$

Pela "Identidade de Polinômios", temos:

$$\begin{cases}
-\dfrac{b}{a} = & x_1+x_2+x_3+x_4\\
\dfrac{c}{a} = & x_1.x_2+x_1.x_3+x_1.x_4+x_2.x_3+x_2.x_4+x_3.x_4\\
-\dfrac{d}{a} = & x_1.x_2.x_3+x_1.x_2.x_4+x_1.x_3.x_4+x_2.x_3.x_4\\
\dfrac{e}{a} = & x_1.x_2.x_3.x_4
\end{cases}$$

Anexo B - Exemplos

1. Exemplo $4x^2-3x+1=0$

$$\begin{cases} a = & 4\\ b = & -3\\ c = & 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{a} = & x_1+x_2 = & \dfrac{3}{4}\\ \dfrac{c}{a} = & x_1.x_2 = & \dfrac{1}{4}\end{cases}$$

2. Exemplo $2x^3-7x^2+x-2=0$

$$\begin{cases} a = & 2\\ b = & -7\\ c = & 1\\ d = & -2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{a} = & x_1+x_2+x_3 = & -\dfrac{-7}{2}\\ \dfrac{c}{a} = & x_1.x_2+x_1.x_3+x_2.x_3 = & \dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{d}{a} = & x_1.x_2.x_3 = & -\dfrac{-2}{2}\end{cases}$$

3. Exemplo $3x^4-2x^3+4x^2+6.x-8=0$

$$\begin{cases} a = & 3\\ b = & -2\\ c = & 4\\ d = & 6\\ e = & -8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{a} = & x_1+x_2+x_3+x_4 = & -\dfrac{-2}{3}\\ \dfrac{c}{a} = & x_1.x_2+x_1.x_3+x_1.x_4+x_2.x_3+x_2.x_4+x_3.x_4 = & \dfrac{4}{3}\\ -\dfrac{d}{a} = & x_1.x_2.x_3+x_1.x_2.x_4+x_1.x_3.x_4+x_2.x_3.x_4 = & -\dfrac{6}{3}\\ \dfrac{e}{a} = & x_1.x_2.x_3.x_4 = & -\dfrac{-8}{3}\end{cases}$$

Anexo C - Exercícios

1. Questão: Determinar k na equação $x^2 - 9x + k = 0$, de modo que uma raiz seja o sobro da outra ($x_1 = 2x_2$).

   Relações de Girard

$$\begin{cases} a = & 1 \\ b = & -9 \\ c = & k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = & 9 \\ x_1.x_2 = & k \end{cases}$$

   Substituindo a relação fornecida no enunciado com as relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_1 = & 9 \\ x_1.2x_1 = & k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 = & 9 \\ 2x_1^2 = & k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = & 3 \\ 2.3^2 = & k \end{cases} \Rightarrow k = 18$$

2. Questão: (Mack-SP) Se x_1, x_2 e x_3 são raizes da equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ o valor de $\sin\left(\frac{\pi}{x_1} + \frac{\pi}{x_2} + \frac{\pi}{x_3}\right)$ é:

   Relações de Girard

$$\begin{cases} a = & 1 \\ b = & -6 \\ c = & 11 \\ d = & -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = & 9 \\ x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 = & 11 \\ x_1.x_2.x3 = & 6 \end{cases}$$

   Expandindo a expressão dada e substituindo as relações de Girard, temos:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{x_1} + \frac{\pi}{x_2} + \frac{\pi}{x_3}\right) &= \sin\left(\frac{\pi.x_1.x_2 + \pi.x_1.x_3 + \pi.x_2.x_3}{x_1.x_2.x_3}\right) \\ &= \sin\left(\pi\frac{x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3}{x_1.x_2.x_3}\right) \\ &= \sin\left(\pi\frac{11}{6}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$