Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas	
Campus	Manaus - Distrito Industrial
Curso	Engenharia de Computação
Disciplina	ECP12 - Cálculo Diferencial e Integral I
Docente	Eduardo Palhares Júnior

Lista 2: Derivadas

Conceito de derivada

1. Considere a função $f(x) = x^2$ e o ponto $a = 1$.
   (a) Faça o gráfico de $f(x)$ junto com as retas secantes que passam pelos pontos $(1, f(1))$ e $(1 + h, f(1 + h))$ para $h = 1$, $h = 0.5$ e $h = 0.1$.
   (b) Calcule a derivada $f'(1)$ e represente a reta tangente no mesmo gráfico. O que você observa sobre as retas secantes à medida que $h \to 0$?

2. Utilize a definição para calcular a derivada das seguintes funções:
   (a) $f(x) = 3x + 5$
   (b) $g(x) = x^2 - 4x + 1$
   (c) $h(x) = \sqrt{x}$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

3. A posição de uma partícula se movendo ao longo de um eixo é $s(t) = t^2 - 4t + 1$.
   (a) Determine a velocidade instantânea da partícula no instante $t = 3$ segundos.
   (b) Qual a interpretação do sinal da sua resposta?
   (c) Encontre a equação da reta tangente à função $s(t)$ no instante $t = 3$.

4. Explique conceitualmente por que se uma função é diferenciável em um ponto a, ela também deve ser contínua nesse ponto. É a recíproca verdadeira? Justifique com um exemplo (pode ser um esboço de gráfico).

Regras de derivação

5. Utilize as derivadas notáveis para calcular a derivada das seguintes funções:
   (a) $x^5 - 12x^3 + 2x - 7$
   (b) $\dfrac{1}{x^4}$
   (c) $2\sqrt{t} + \sqrt[3]{t}$
   (d) $(x + 2)^2$
   (e) $5e^x + 3x^2$
   (f) $7\ln(x) - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
   (g) $4^x + x^4$
   (h) $\log_5(t) + \pi^2$
   (i) $\sin(x) - 3\cos(x)$
   (j) $\theta^2 + \sec(\theta)$
   (k) $\tan(x) - \cot(x)$
   (l) $e^x + \csc(x)$
   (m) $4\arcsin(x) + 10$
   (n) $x^3 - \arctan(x)$
   (o) $5\sinh(t) - 2\cosh(t)$
   (p) $\ln(x) + \tanh(x)$

6. Utilize as regras de derivação para calcular a derivada das seguintes funções:

(a) x^3e^x

(b) $(x^2+1)\sin(x)$

(c) $\ln(t)\tan(t)$

(d) $\dfrac{2x+5}{x^2-1}$

(e) $\dfrac{e^x}{\cos(x)}$

(f) $\dfrac{\sin(x)}{x^2}$

(g) $\dfrac{te^t}{t+1}$

(h) $(x^3-4x+2)^5$

(i) $\cos(x^2+1)$

(j) e^{3x^2-x}

(k) $\sqrt{t^2+9}$

(l) $\ln(\sin(x))$

(m) $\tan^3(x)$

(n) $x^4\sin(5x)$

(o) $\dfrac{e^{-2x}}{x^2+1}$

(p) $\sqrt{\cos(e^{x^2})}$

7. Utilize derivação implícita para calcular $\dfrac{dy}{dx}$ nas seguintes funções:

(a) $x^2+y^2=100$

(b) $x^3+y^3=8xy$

(c) $\cos(y)+x=y^2$

(d) $e^y\sin(x)=x+xy$

(e) $x^2+xy+y^2=3$

8. Utilize derivação logarítmica para calcular a deriada das seguintes funções:

(a) $x^{\sin(x)}$

(b) $(\ln x)^x$

(c) $\dfrac{(x^2+1)^4\sqrt{x}}{\sin^3(x)}$

Taxas relacionadas, modelagem e otimização

9. Uma escada de 5 metros está apoiada em uma parede vertical. A base da escada começa a deslizar horizontalmente, afastando-se da parede a uma taxa constante de 0,2 m/s. Com que velocidade o topo da escada está descendo pela parede no instante em que a base está a 3 metros da parede?

10. O ar está sendo bombeado para um balão esférico de tal forma que seu volume aumenta a uma taxa de 100 cm^3/s. A que taxa o raio do balão está aumentando quando o diâmetro é de 50 cm?

11. Um tanque de água tem a forma de um cone circular invertido com base de raio 2 metros e altura de 4 metros. Se a água está sendo bombeada para fora do tanque a uma taxa de 2 m^3/min, encontre a taxa na qual o nível da água está baixando quando a água tem 3 metros de profundidade.

12. Uma pessoa de 1,80 m de altura se afasta de um poste de luz de 5 m de altura a uma taxa de 1,5 m/s. A que taxa a ponta da sua sombra se move quando ela está a 10 metros do poste?

13. Dois navios partem do mesmo porto ao meio-dia. O navio A navega para o sul a 15 km/h e o navio B navega para o leste a 20 km/h. A que taxa a distância entre os navios está aumentando às 14h00?

14. Um fazendeiro tem 2400 metros de cerca e quer cercar um campo retangular que faz fronteira com um rio reto, que não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem a maior área possível?

15. Uma caixa sem tampa deve ser feita de um pedaço quadrado de papelão, com 30 cm de lado, cortando-se quadrados iguais de cada canto e dobrando-se as laterais. Qual é o maior volume possível que essa caixa pode ter?

16. Uma empresa estima que o custo de produção de x unidades de um produto específico é $C(x) = 2600+2x+0.001x^2$. A receita $R(x) = x\cdot p(x)$ é dada pela relação de demanda $p(x) = 10-0.002x$, onde p é o preço por unidade. Sabendo que $L(x) = R(x)-C(x)$, encontre o nível de produção que maximizará o lucro.

17. Encontre o ponto sobre a parábola $y^2 = 2x$ que está mais próximo do ponto $(1, 4)$.

18. Um fabricante precisa criar uma lata cilíndrica com tampa com volume de 1000 cm^3 (1 litro). Encontre o raio e a altura que minimizam a quantidade de metal utilizado.

Análise de funções

19. Faça um estudo completo para cada uma das funções abaixo:
    - (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
    - (b) $g(x) = x^4 - 2x^2 + 3$
    - (c) $h(x) = x^4 - 4x^3$
    - (d) $m(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
    - (e) $n(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$
    - (f) $p(x) = x \cdot e^{-x}$
    - (g) $q(x) = x \cdot \ln x$
    - (h) $r(x) = \sqrt{9-x^2}$
    - (i) $s(x) = x - 2\sin x$

    1. Encontre o domínio da função
    2. Calcule os pontos de intersecção com os eixos
    3. Encontre os pontos e os valores críticos
    4. Determine (se possível) se a função é par ou ímpar
    5. Determine os intervalos de crescimento/decrescimento
    6. Classifique os máximos e mínimos locais e globais
    7. Determine os intervalos de concavidade e convexidade
    8. Determine os pontos de inflexão
    9. Encontre as assíntotas
    10. Esboce o gráfico da função

20. Considere a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ no intervalo $[1, 3]$.
    - (a) Verifique que as três condições do Teorema de Rolle são satisfeitas.
    - (b) Encontre todos os números c no intervalo $(1, 3)$ tais que $f'(c) = 0$.

21. Considere a função $g(x) = x^3 - x$ no intervalo $[0, 2]$.
    - (a) Verifique que a função satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio.
    - (b) Encontre todos os números c no intervalo $(0, 2)$ que satisfazem a conclusão do teorema, ou seja, onde $g'(c) = \dfrac{g(2)-g(0)}{2-0}$.

22. Explique por que a função $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$ no intervalo $[0, 2]$ não satisfaz as condições do Teorema do Valor Médio.

23. Um carro de corrida completa uma volta de 6 km em 2 minutos. Utilize o Teorema do Valor Médio para mostrar que, em algum momento durante a volta, a velocidade instantânea do carro era exatamente 180 km/h.

Aplicações de derivada

24. Calcule os seguintes limites usando a Regra de L'Hôpital quando apropriado.

    (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin(x)}$

    (b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

    (c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

    (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln(x)$

    (e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$

    (f) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$

    (g) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^x$

25. Considere a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em torno do ponto $a = 8$

    (a) Utilize aproximação linear para estimar $f(8.1)$ e calcule o erro.

    (b) Utilize aproximação quadrática para estimar $f(8.1)$ e calcule o erro.

    (c) Verifique graficamente a função e as aproximações na região.

26. Considere a função $g(x) = \cos x$ em torno do ponto $a = 30°$

    (a) Utilize aproximação linear para estimar $g(29°)$ e calcule o erro.

    (b) Utilize aproximação quadrática para estimar $g(29°)$ e calcule o erro.

    (c) Verifique graficamente a função e as aproximações na região.

    OBS: a derivada deve ser calculada em radianos

27. Seja a função $p(x) = e^{-2x}$

    (a) Encontre o polinômio de MacLaurin de grau 3 para $p(x)$.

    (b) Utilize o polinômio $P_3(x)$ para estimar o valor de $e^{-0.2}$.

28. Seja a função $q(x) = \dfrac{1}{x}$

    (a) Encontre o polinômio de Taylor de grau 3 para $q(x)$ centrado em $a = 1$.

    (b) Utilize o polinômio $P_3(x)$ para estimar o valor de $\dfrac{1}{1.1}$.

29. Considere a função $z(x) = \ln(x+1)$ e sua aproximação pelo Polinômio de Taylor em torno do ponto $a = 0$.

    (a) Estime o erro máximo cometido na aproximação de $\ln(1.2)$ ao utilizar $P_3(x)$, o polinômio de Taylor de grau 3, através da fórmula do Resto de Lagrange.

    (b) Determine o menor grau n do polinômio $P_n(x)$, necessário para garantir que o erro absoluto na aproximação de $\ln(1.2)$ seja inferior a 10^{-4}.

30. Utilize os Polinômios de Taylor para verificar a Relação de Euler

    (a) Encontre os Polinômios de Maclaurin de ordem 7 para as funções $\sin(x)$ e $\cos(x)$.

    (b) Encontre o Polinômio de Maclaurin de ordem 7 para a função e^{ix}.

    (c) Mostre que com aproximação de ordem 7, vale a relação $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$.

Bons Estudos!!!