Eduardo Palhares Júnior

Relatório da disciplina MAT310

São Paulo

05 de julho de 2019

Eduardo Palhares Júnior

Relatório da disciplina MAT310

Relatório Técnico das metodologias aplicadas na turma MAT310 no período entre maio e julho de 2019.

IFSP - Câmpus São Paulo

Instituto Federal de São Paulo

Curso Técnico Integrado em Mecânica

São Paulo

05 de julho de 2019

Resumo

O presente relatório tem como objetivo apresentar informações sobre a disciplina MAT-310 do IFSP-Campûs São Paulo no 1° semestre de 2019, ministrada pelo Professor Eduardo Palhares Júnior. Ambientar o leitor sobre o estado da turma, apresentar as estratégias utilizadas para atingir o melhor resultado dentro do cenário disponível e discutir os resultados obtidos.

Palavras-chaves: Aplicações de GA. PBL (Problem Based Learning). Geogebra.

Sumário

Introdução

O presente relatório tem como objetivo principal relatar informações pertinenetes à disciplina MAT310, ministrada na etapa final do segundo bimestre de 2019 para os alunos do curso técnico integrado em Mecânica, no IFSP - Campus São Paulo.

Conforme contrato firmado após aprovação e convocação através no processo seletivo **EDITAL Nº 134 DE 21 DE FEVEREIRO DE 2019**, as atividade de docência do Professor Substituto Eduardo Palhares Júnior foram iniciadas no dia 21/05/2019, tendo o primeiro contato com a referida turma no dia 22/05/2019.

Durante esse primeiro contato com a turma, algumas incoerências foram notadas. Foram feitas algumas perguntas (uma avaliação diagnóstica), e notou-se que apesar de alguns alunos terem certa familiaridade com as equações que eram esperadas para aquele momento do curso (apenas procedimental), praticamente nenhum deles tinha muita noção conceitual do que era geometria analítica. Menos da metade da turma conseguia aplicar fórmulas com alguma precisão, mas não tinham capacidade de abstração para um exercício um pouco menos óbvio. Quanto ao restante da turma, ou apresentavam introspecção severa ou simplesente não entendiam do que se tratava aquele assunto.

Percebendo o cenário duvidoso e a escassa quantidade de aulas, achei curioso que a turma de ensino médio que tem apenas 2 aulas por semana estava com o conteúdo pareado/sincronizado com a graduação, que tem 4 aulas por semana (em um mesmo período, visto que tanto a graduação quanto o ensino médio haviam iniciado aquele assunto naquele semestre). Pelo que foi relatado pela turma, o processo de avaliação que vinha acontecendo era contínuo, com atividades semanais, mas a maioria dos alunos interessados em aprender não viam um sentido prático, visto que não conseguiam consolidar os conceitos aplicados.

Parte I

Regência

1 Aulas na sala

1.1 Circunferências

Com a intenção de revisar o conteúdo referente a circunferências, foi desenvolvida uma solução step-by-step da lista de exercícios proposta à graduação sobre o tema, afim de que fosse revisado os principais conceitos e compreendido a sequência lógica de como utiliza-los na prática. A referida lista bem como sua solução detalhada são apresentadas nos anexos A e B deste relatório. Ambos os materias foram enviados no dia 4 de junho de 2019, através do e-mail acordado com a sala (visto que ainda não tinha previsão de inclusão do meu cadastro no SUAP). Segue a mensagem enviada:

"*Boa noite*

Conforme combinado em aula, segue material complementar para auxiliar nos estudos.

Em anexo há uma lista de exercícios para que possam praticar os conteúdos apresentados em aula, e a respectiva solução detalhada para que possam conferir se estão fazendo corretamente.

Qualquer dúvida, estou à disposição ao fim da aula e/ou no horário reservado para atendimento aos alunos, conforme combinado em sala.

Agradeço desde já a atenção e me coloco a disposição

Atenciosamente, Eduardo"

Após disponibilizar o material de revisão, a melhora no rendimento da turma no que tange esse tema foi notável. O primeiro ponto importante é que a maioria dos alunos que até então ficavam introspectivos, agora conseguiam dialogar quando se apresentava algo na lousa. Outro ponto importante é que os alunos agora estavam fazendo perguntas mais profundas, sobre detalhes da solução, o que mostrava que o processo lógico geral da solução havia sido compreendido.

1.2 Cônicas

Após repassar o conteúdo referente a circunferências, revisar e discutir o material apresentado como material complementar (anexos A e B), foi iniciado o ultimo assunto referente ao primeiro semestre, "cônicas".

O problema que foi sentido na parte de circunferências se intensificou, pois além das equações de cônicas carregarem mais parâmetros, a noção de lugar geométrico parecia demasiadamente abstrata para os alunos. Foi então que decidiu-se utilizar uma ferramenta computacional para auxiliar nesse processo de interpretação abstrata.

Como a turma possuia uma quantidade de aulas à serem respostas, foram propostas atividades (anexo C e D) envolvendo inclusive o assunto de cônicas, para ser discutida e resolvida no laboratório de informática utilizando o software Geogebra. Os materiais foram enviadosno dia 15 de junho de 2019, novamente através do e-mail acordado com a sala. Segue a mensagem enviada:

"*Boa tarde*

Conforme combinado em aula, seguem os trabalhos a serem realizados no Geogebra e entregues até o dia da prova.

Na próxima aula de reposição, trabalharemos em cima dessas atividades, mas caso alguém já conheça o software, pode adiantar o trabalho em casa.

Qualquer dúvida, estou à disposição ao fim da aula e/ou no horário reservado para atendimento aos alunos, conforme foi acordado.

Agradeço desde já a atenção e me coloco a disposição

Atenciosamente, Eduardo

2 Aula no Laboratório

Conforme acordado previamente, a aula de reposição ocorreu no dia 25/06 (terça-feira) à partir das 13:15 no laboratório 9 do bloco C.

Como as atividades haviam sido fornecidas previamente via e-mail, muitos alunos já haviam experimentado o software Geogebra e estavam relativamente adiantados no desenvolvimento da atividade. Dessa forma, a primeira parte da aula foi utilizada para apresentar o database do site oficial do geogebra, e discutir alguns exemplos que estavam disponíveis para perceber diferentes formas de se trabalhar com o mesmo conceito.

Os alunos apresentaram grande interesse ao perceber as potencialidades da ferramenta, bem como a quantidade de materiais de alta qualidade que estavam disponíveis gratuitamente, no entanto, era preciso manter o foco nas atividades propostas. Conforme os alunos iam avançando nas etapas, ocorria uma transferência de conehcimento bastante horizontal, pois quando a atenção era voltada para de um núcleo de alunos que tinha um problema específico, os alunos que estavam do outro lado do laboratório se ajudavam entre sí, transpondo dificuldades de aprendizagem de forma colaborativa.

Finalmente, quando o horário da reposição ja estava chegando ao fim e a maioria dos alunos já haviam concluído, foi realizada uma discussão sobre a importância dessas ferramentas na utilização cotidiana da geometria analítica (seja nas empresas, indústria, etc...). Como o período da aula já havia acabado, oficialmente, um grupo de alunos interessados se reuniu e foi solicitado que discutissemos sobre a aplicação desses conceitos estudados em alguns projetos mais avançados de engenharia, mostrando o nível de complexidade simbólica e numérica de geometrias não-lineares, e como o software ajuda profundamente na abordagem de problemas complexos.

Foi apresentado, à critério de curiosidade, videos abordando problemas de engenharia envolvendo o efeito flutter (**??**), (**??**), (**??**) e (**??**). Como isso envolvia indiretamente, o conteúdo de outras disciplinas inerentes ao curso de mecânica, os alunos ficaram euforicos tentando compreender como era realizada a modelagem de problemas tão complexos. De fato, as expressões eram bastante carregadas, porém, foi discutido de forma bastante geral como os métodos numéricos atuam sobre problemas analíticamente muito complicados, aproximando a solução dentro de pequenos intervalos.

No auge da discussão, quando os alunos já haviam percebido a importância dos softwares de modelagem para problemas complicados, um aluno fez uma pergunta chave:

"*Se a grande maioria dos cálculos é feita por algoritmos de aproximação numérica, para que gastamos tanto tempo na aula fazendo repetidamente calculos analíticos em problemas* *quase-triviais? Se essas contas repetitivas retratam casos tão simplificados que não tem praticamente nenhuma aplicação real, não seriam elas, praticamente inúteis?*"

Nesse momento, os alunos presentes pareciam convencidos de que havia alguma incoerência, no entanto, os próprios vídeos acabaram por responder a questão. Além da importância que esses conceitos mais fundamentais tem no desenvolvimento da cognição, eles servem para gerar senso crítico em relação aos dados calculados. Por mais que um software de elementos finitos possa emular efeitos caóticos em uma geometria complicadissima, impossível de calcular manualmente, se o resultado for incoerente com o que os princípios físicos preconizam, a solução não tem valor.

Muito mais importante do que gerar resultados é avaliar esses resultados de forma crítica para saber se eles são factiveis e atendem as normas de segurança. Com um bom software um profissional com pouca experiência pode gerar um projeto complexo, mas que pode estar condenado ao fracasso por conta de hipoteses mal avaliadas.

Finalmente, os alunos compreenderam a importância do software como ferramenta auxiliadora de problemas complexos, mas também perceberam a importância de ter os conceitos bem consolidados para poder interpretar de forma adequada os resultados encontrados. Feita essa consideração, a aula de laboratório foi efetivamente encerrada (apesar de estar fora do horário oficial, a maioria da sala permaneceu até o final, pois estavam motivados com as discussões).

Parte II

Avaliação

3 Avaliação Somativa

Após a aula de laboratório, ocorreu a aplicação da primeira etapa da avaliação somativa.

Devido ao fato dos alunos terem apresentado um desempenho surpreendente na aula de laboratório, acrescido da notável diferença no aspecto motivacional e comportamental da sala como um todo, percebeu-se que a sala esperava um tipo de avaliação diferente do que se estava acostumado, para que pudessem demonstrar os conhecimentos adquiridos de forma mais plena. Além disso, a tensão em relação a realização da prova parecia perturbar a maioria dos alunos que questionavam o professor (tanto pessoalmente, quanto por e-mail) sobre o conteúdo e a forma como seria cobrado.

Buscando oferecer um ambiente onde o aluno pudesse refletir com mais flexibilidade e tranquilidade sobre os assuntos propostos, a avaliação somativa utilizou como base a metodologia ativa conhecida como PBL - Problem-based learning (ABP - Aprendizagem baseada em problemas).

3.1 Avaliação procedimental

3.1.1 Conteúdo

A primeira intervenção da avaliação somativa referiu-se a uma etapa procedimental, abordando problemas que ja haviam sido resolvidos e discutidos na aula teórica anterior (dia 19 de junho de 2019).

O documento referente a avaliação pode ser verificado na íntegra no anexo E

3.1.2 Impressão

A etapa de impressão da avaliação ocorreria na véspera (para manter um planejamento organizado e seguro), porém, por conta de um problema técnico ainda desconhecido, alguns caracteres estavam corrompidos (provavelmente por serem unicode). Não era possível recompilar a prova na sala dos professores, visto que os compiladores MikTex possuem algumas restrições e exigiriam permissão de administrador para atualização de certos packages. Dessa forma, a avaliação foi recompilada posteriormente e sua impressão ficaria para o dia da avaliação.

Na referida data as regências iniciaram as 07:00 com aplicação de avaliação para as outras duas disciplinas, o que inviabilizou a impressão prévia. Faltando alguns minutos para o horário da aplicação da avaliação, foi realizada a impressão de uma unidade de teste que ocorreu sem grandes problemas (A3 em livreto, com 3 paginas frente e verso, como consta no anexo E). Ao verificar que a impressão estava OK, prosseguiu-se a impressão de mais 37 cópias.

Ao chegar na sala de aula para aplicação, foi notado um problema de impressão. Apesar da versão de teste ter sido impressa corretamente, as outras 37 cópias tiveram apenas a página 2 impressa. Esse cenário causou certo pânico e foi necesária uma medida de contingência para tentar remediar a situação.

3.1.3 Aplicação

Devido a característica colaborativa que ocorreu em laboratório, e a ampla discussão sobre a utilização de ferramentas para auxiliar na tomada de decisão, já havia sido acordado com os alunos previamente que a avaliação seria em dupla e com consulta ao material desenvolvido em sala, inclusive o celular (para que pudesse ser utilizado o app geogebra).

Conforme expresso em 3.1.2, o problema de impressão poderia causar atrasos na aplicação. Como se tratava de uma avaliação longa, isso poderia ser bastante limitante. Dessa forma, foi proposta uma medida paleativa.

O exercício mais importante e longo seria o 2º (caso não fossem percebidas certas simetrias), porém, a tabela foi montada justamente para que os alunos enxergassem todas as informações de forma organizada e tomassem a decisão a partir daí. Como as tabelas em branco foram justamente a parte que sairam corretas na impressão, optamos por passar os exercícios na lousa enquanto eles trabalhavam no exercício 2. Após isso, seria feita uma nova impressão na sala dos professores, enquanto eles trabalhavam nas outras questões.

Um dos alunos se prontificou a escrever na lousa enquanto era providenciada a reimpressão correta. No entanto, a sala dos professores estava bastante cheia e houve receio em explicar a situação para os colegas. Dessa forma, retornando à sala de aula, optou-se por utilizar a parte em branco da avaliação para que fossem apresentados o resultados das outras questões.

De fato, após discussão em pares, boa parte da sala estava com uma compreensão adequada dos problemas propostos. As perguntas eram pertinentes e a utilização dos recursos auxiliares ajudaram a notar certas nuances que tornavam a solução bem mais clara e direta.

3.2 Avaliação conceitual

A segunda etapa da avaliação somativa ocorreu na aula seguinte (03/07/2019), e teve como objetivo discutir individualmente com cada aluno a percepção e raciocínio utilizados em cada questão.

Apesar de certa apreensão, os alunos conseguiram dialogar de forma bastante satisfatória sobre praticamente todas as questões.

Houve falta de atenção de boa parte da turma na utilização do geogebra, o que levou a algumas solução incorretas. Porém, a aplicação conceitual adequada e o compreensão sobre os erros cometidos contrabalancearam. Ao final de cada correção, chegava-se a um concenso entre aluno e professor sobre a nota proposta e os critérios de avaliação aplicados, e se o aluno concordasse com a nota atribuída, o mesmo assinava o documento garantindo ciência e concordância.

Todas as provas tiveram o mesmo critério de correção e foram devidamente assinadas pelos alunos, após o concenso sobre o método e o critério proposto. Os alunos agradeceram pela transparência e elogiaram a proposta.

4 Avaliação Formativa

4.1 Avalição complementar

Conforme acordado com a turma durante o curso, seriam propostas atividades extras relacionadas ao que havia sido estudado no laboratório acerca da utilização do software geogebra. A entrega não seria obrigatória, mas se entregue, seria incluída como uma nota adicional para compor a média final, segundo a seguinte equação:

$$M_f = \frac{A_s + A_f}{2} \qquad \text{onde} \begin{cases} A_s = A_p + A_c & \text{avaliação somativa} \\ A_f = T_{circ} + T_{coni} & \text{atividades geogebra} \end{cases}$$

Apesar da não obrigatoriedade, todos os alunos optaram por realizar a atividade e relataram que foi fundamental para o bom desempenho que tiveram na avaliação. De fato, os trabalhos ficaram muito bem feitos, superando as expectativas iniciais.

4.2 Parcitipação

Nas primeiras semanas a participação foi um opuco tímida, pois os alunos aparentemente ainda não haviam criado uma conexão com o novo modelo. Depois de alguma interação, estabeleceu-se uma relação de confiança mútua que promoveu o contrato social entre professor/alunos e propiciou o bom desempenho observado.

Foi bastante difícil combinar as reposições, pois diversos alunos fazem curso técnico no contra-turno e todas as datas propostas prejudicavam alguns alunos, tornando o processo democrático inviável. Após diversas tentativas, conseguimos realizar com sucesso a reposição no laboratório conforme expresso na seção anterior. Devido ao calendário extremamente apertado devido a convocação tardia, agravado pela pouco disponibilidade dos alunos, as últimas reposições foram aplicadas na ultima semana de aula.

Parte III

Resultados

5 Análise de Resultados

Para analisar a eficácia da metodologia aplicada, compararam-se resultados obtidos pelos alunos na primeira avaliação com os resultados obtidos na segunda avaliação. O caráter quantitativo dos dados pode oferecer uma primeira hipótese da eficácia da metodologia.

Alés disso, foi aplicado um questionário online (opcional e sigiloso) afim de coletar o feedback dos alunos. O questionário é composto por questões objetivas, visando mostrar uma resposta quantiativa da percepçao/aceitação dos alunos acerca das propostas referentes ao contrato social firmado, além de uma seção subjetiva relacionada a críticas e/ou sugestões, com a finalidade de melhorar o processo se ensino continuamente.

5.1 Avaliação somativa/formativa

A metodologia empregada baseou-se na análise das medidas de tendência central e dispersão das notas das avaliacões de ambos os professores.

Tabela 1 – Notas consolidadas

Notas	Carlini	Palhares
Mínimo	3.50	6.50
Máximo	10.00	9.95
Média	7.75	8.33
Desvio Padrão	1.55	0.64

Podemos observar à partir da tabela 1 que ocorreu uma nítida melhora no desempenho dos alunos. A média de notas , bem como a nota mínima alcançada na segunda etapa foram significativamente maiores (aumento de 7,5% para a média e 85% para a nota mínima).

Além disso houve muito mais homogenidade nos resultados, como pode ser observado pela reducão do desvio padrão. De fato, a turma estava mais integrada e com um pensamento mais uniforme, tendo em vista as discussões que eram feitas no decorrer da aula. Apesar do nivel de abstração do conteúdo, havia uma significância dos assuntos em relação a aplicações da engenharia que vivenciamos no nosso cotodiano.

Podemos observar essa homogenidade de forma mais nítida a partir dos disgramas de dispersão 1 e 2. Na segunda etapa do curso, além do distribuição ter apresentado um comportamento muito mais simétrico, a maioria absoluta das notas ficaram muito próximas a média, em uma distância inferior a $\pm\sigma$. Esse comportamento reforça a tese de eficacia do método, visto que era esperado um comportamento bem ajustado a uma gauseana para fenômenos dessa natureza.

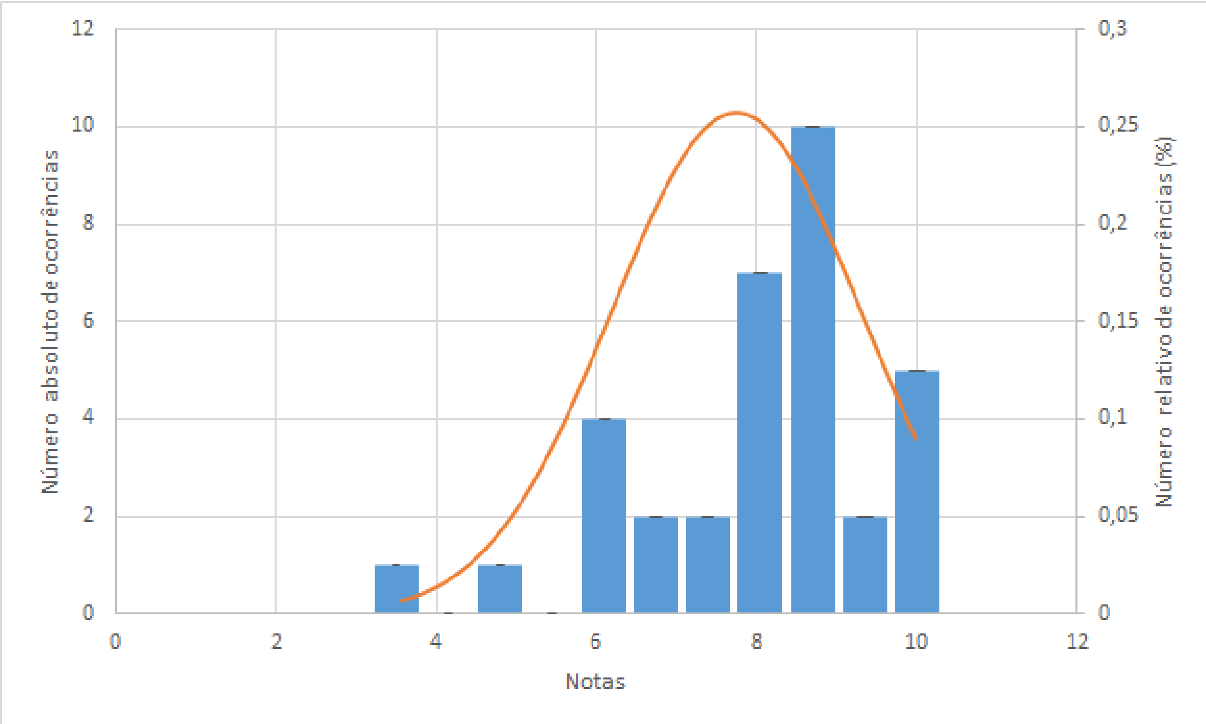


Figura 1 – Dispersão das notas do professor Carlini

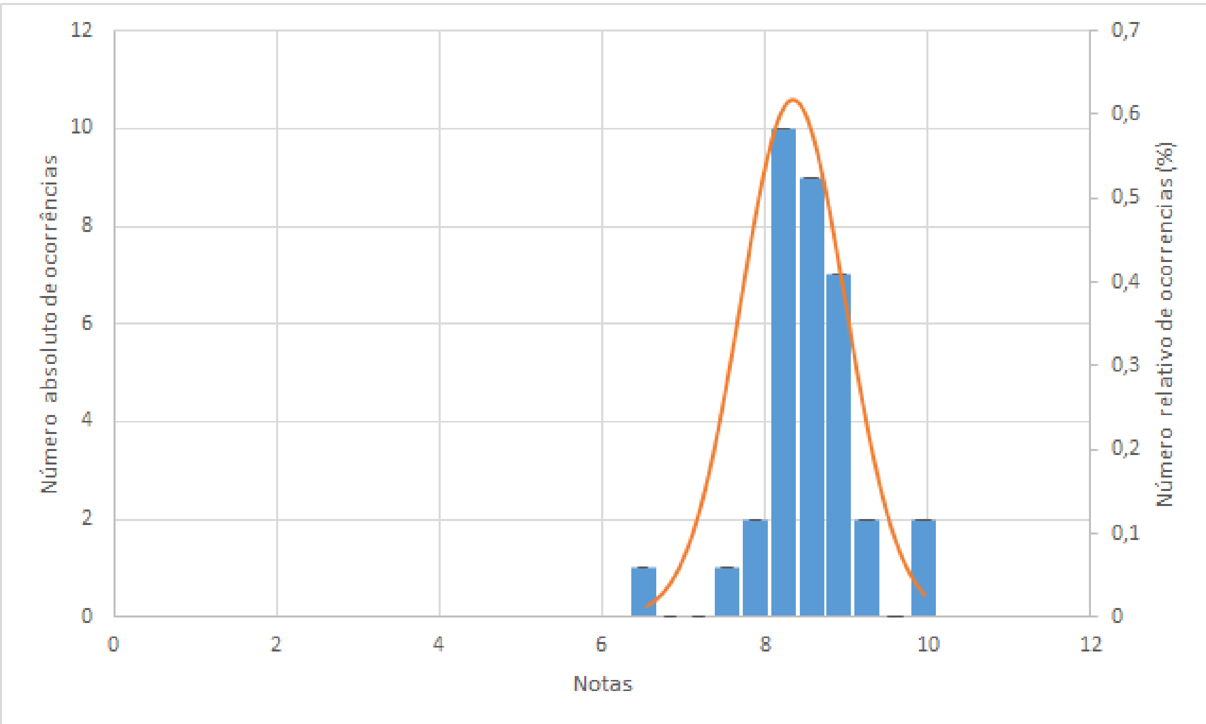


Figura 2 – Dispersão das notas do professor Palhares

5.2 Feedback dos alunos

Para avaliar a percepção dos alunos a respeito dos métodos propostos, acordados e aplicados, foi submetido um formulário online através da ferramenta "Google Forms", de caráter optativo e sigiloso. Ao total, foram coletadas 21 respostas que representam 62% do total de alunos matriculados que participaram das aulas e da avaliação, ou seja, uma quantidade significativa para representar o comportamento do grupo analisado. Por questões de sigilo, a identidade dos participantes foi garantida a priori pelo proprio sistema de coleta e processamento dos dados.

A seguir serão apresentadas as perguntas e as respectivas respostas fornecidas pelos alunos interessados. As seções 1 e 2 são apenas cadastrais e de verificação para evitar que algoritmos e bots gerem respostas automáticas, ou seja, não trazem nenhum dado relevante para essa análise. Dessa forma, serão apresentadas e analisadas somentes as seções 3, 4 e 5.

5.2.1 Seção 3 - Avaliação da disciplina

5.2.1.1 A disciplina está bem integrada às demais disciplinas do curso?

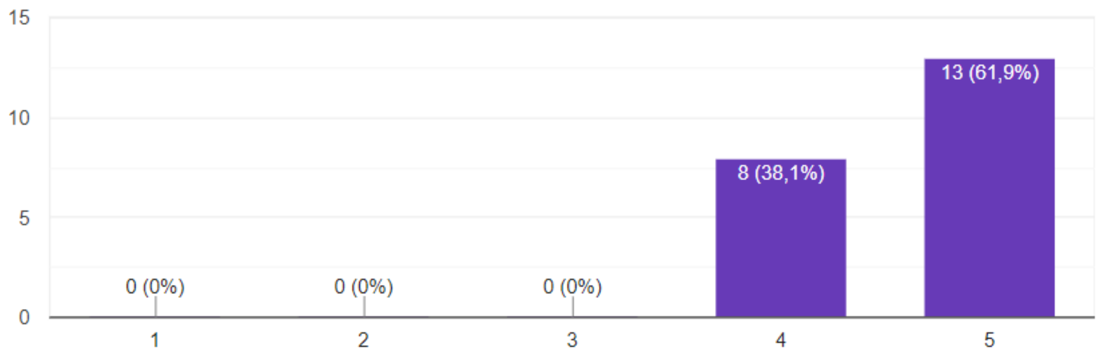


Figura 3 – Resumo das respostas referentes a questão 1 - seção 3

5.2.1.2 Foi convincente a importância da disciplina para a formação do técnico em mecânica?

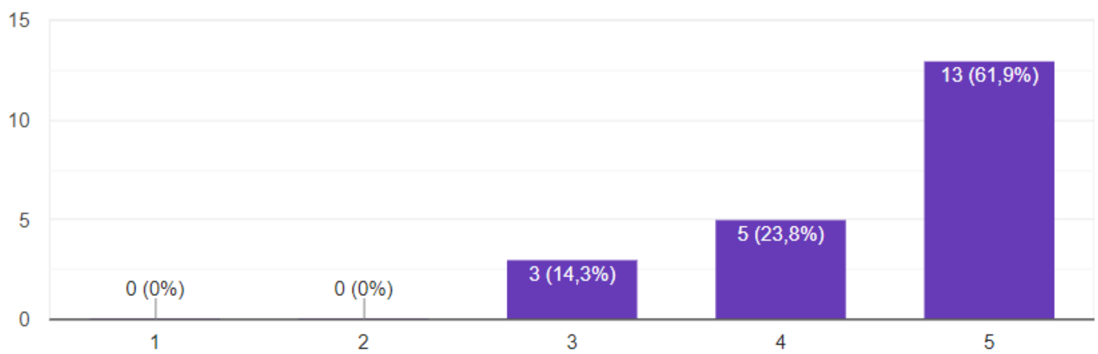


Figura 4 – Resumo das respostas referentes a questão 2 - seção 3

5.2.1.3 O professor foi assíduo durante o período de aulas?

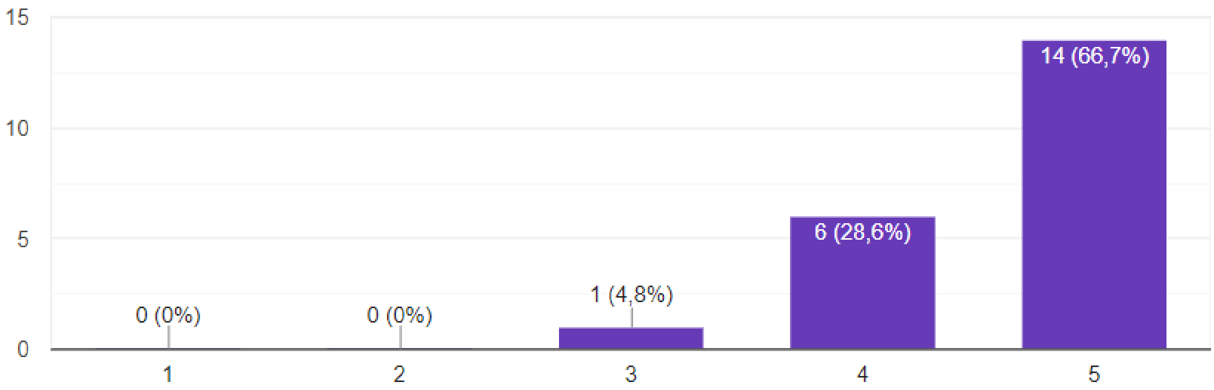


Figura 5 – Resumo das respostas referentes a questão 3 - seção 3

5.2.1.4 A carga horária da disciplina está adequada?

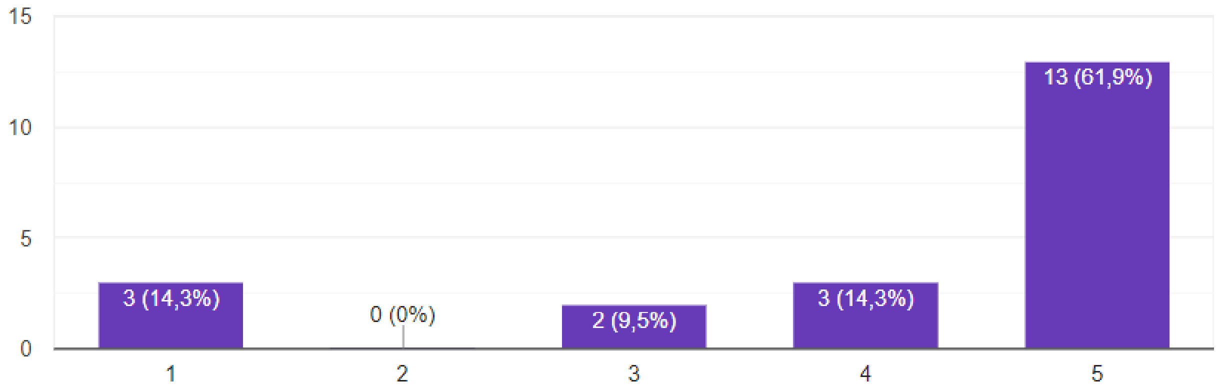


Figura 6 – Resumo das respostas referentes a questão 4 - seção 3

5.2.1.5 A bibliografia sugerida está adequada?

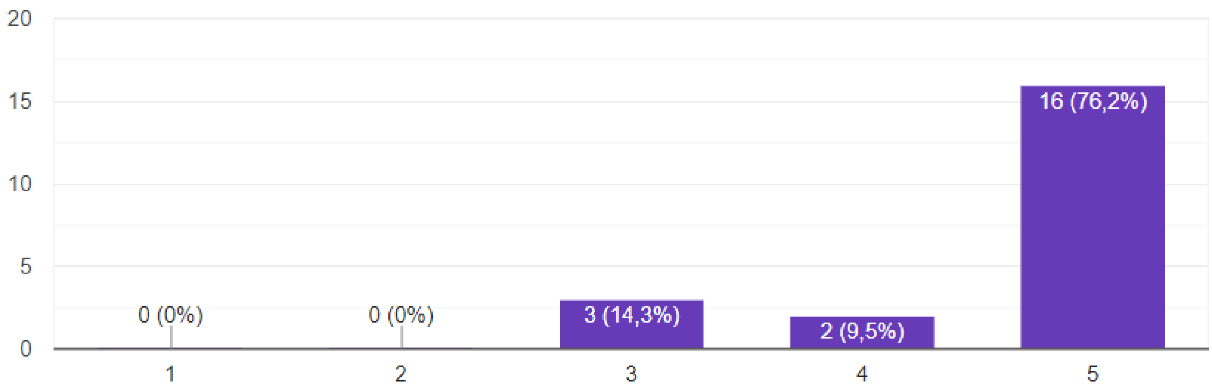


Figura 7 – Resumo das respostas referentes a questão 5 - seção 3

5.2.1.6 O material didático sugerido atendeu as necessidades de estudo?

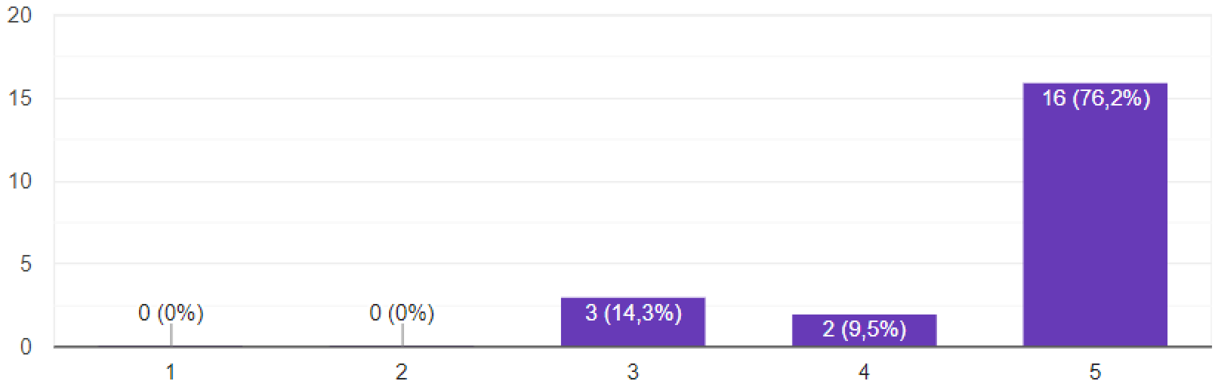


Figura 8 – Resumo das respostas referentes a questão 6 - seção 3

5.2.1.7 As atividades (provas, trabalhos, atividades, etc...) propiciaram aprendizagem compatível?

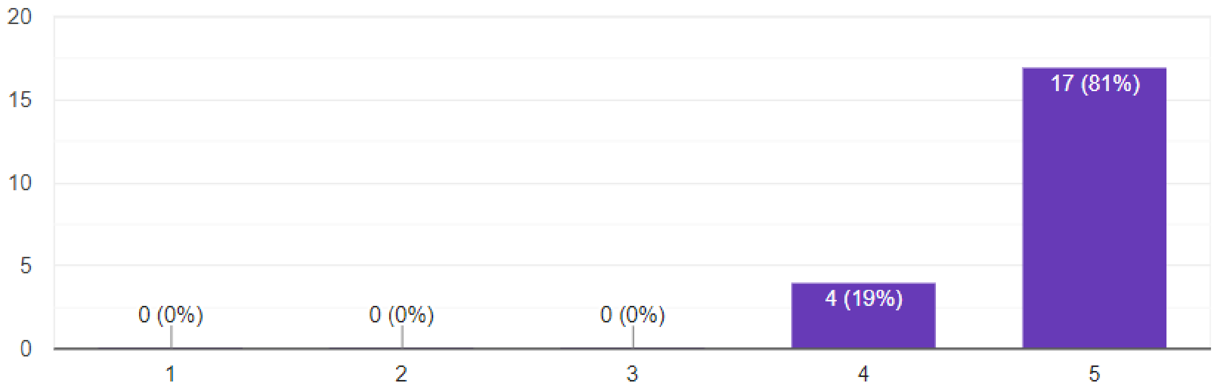


Figura 9 – Resumo das respostas referentes a questão 7 - seção 3

5.2.1.8 O processo estabelecido entre aluno-professor foi justo?

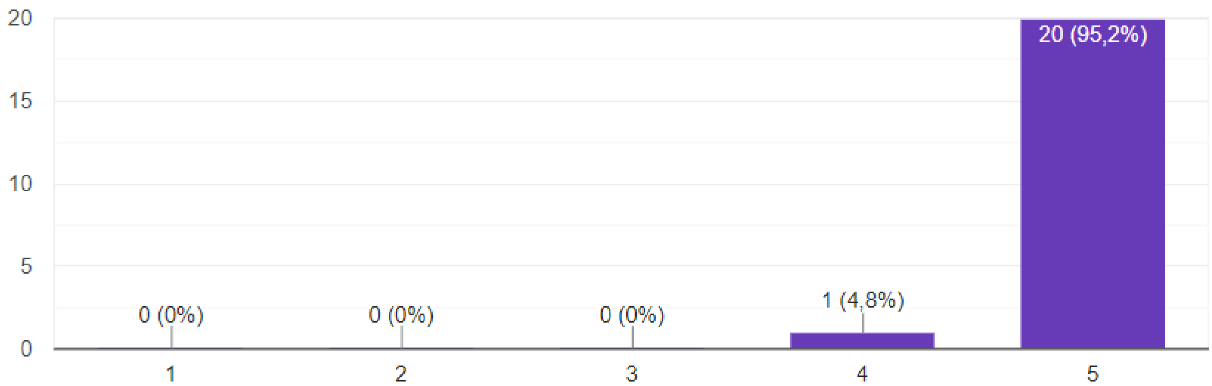


Figura 10 – Resumo das respostas referentes a questão 8 - seção 3

5.2.1.9 O professor atendeu as dúvidas nos horários de atendimento marcados?

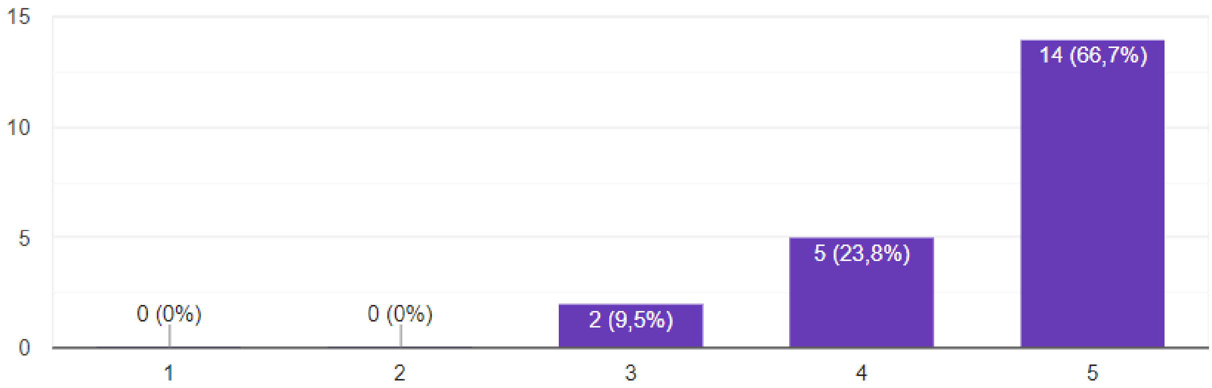


Figura 11 – Resumo das respostas referentes a questão 9 - seção 3

Como podemos notar, as questões 5.2.1.1, 5.2.1.2, 5.2.1.4 e 5.2.1.5que são relacionadas ao projeto pedagógico do curso possuem uma maior dispersão, por não conseguirem compreender uma correlação tão direta entre os conhecimentos abstratos e a aplicação na área de mecânica. Esse retrato parecia bem pior quando a metodologia começou a ser aplicada.

A questão que merece mais atenção é sem dúvda a 5.2.1.4, pois mostra uma forte dispersão e pulverização de respostas. Durante o curso os alunos reclamaram abundamente da quantidade de conteúdo para o tempo disponível, mas talvez tenha ainda optado majoritariamente pela nota 5 pelo fato de terem atingidos notas altas, o que significa que o conteúdo foi de fato conquistado.

Avaliando agora as questões 5.2.1.3, 5.2.1.6, 5.2.1.7, 5.2.1.8 e 5.2.1.9, podemos perceber que o que dependeu exclusivamente do professor, ocorreu um alto índice de satisfação. Com especial atenção as questões 5.2.1.3 e 5.2.1.9, pois referem-se a situações que foram prejudicadas pela contratação tardia, visto que a dificuldade no agendamento de reposições de aula trouxe indignação a alunos que tinham disponibilidade. A turma em geral julgou quiestionável a percepção desses alunos, visto que a reposição de greve afeta alunos que tem responsabilidade no contra-turno (cursos técnicos por exemplo).

5.2.2 Seção 4 - Processo de ensino-aprendizagem

5.2.2.1 Como você avalia a explicação do conteúdo pelo(a) professor(a)?

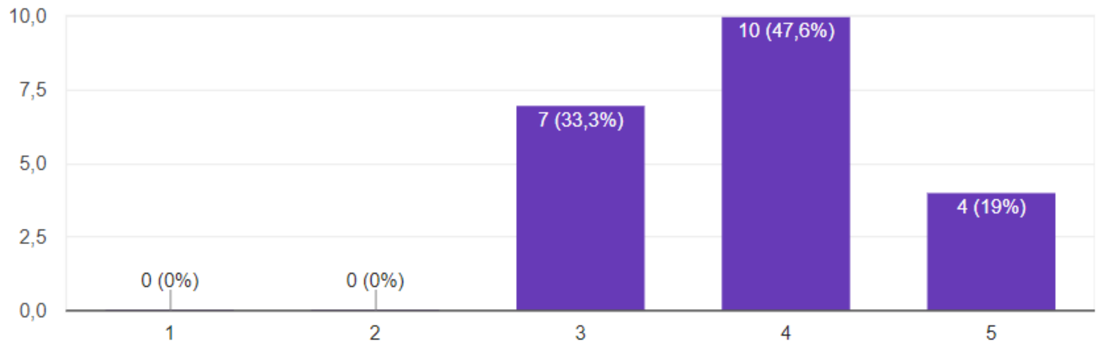


Figura 12 – Resumo das respostas referentes a questão 1 - seção 4

5.2.2.2 Como você avalia a utilização da linguagem alvo em sala de aula por parte do(a) professor(a)?

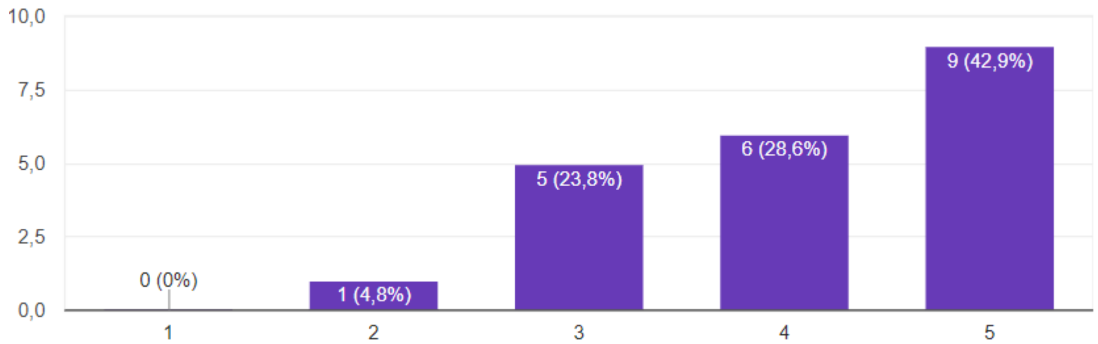


Figura 13 – Resumo das respostas referentes a questão 2 - seção 4

5.2.2.3 A utilização do exemplos mais avançados da vida real (engenharia, projetos) como elementos de motivação foi importante para compreender a importância dos conteúdos?

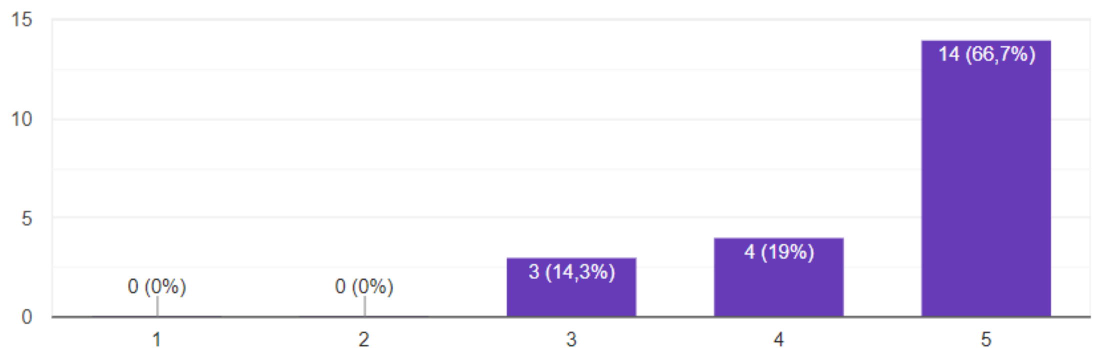


Figura 14 – Resumo das respostas referentes a questão 3 - seção 4

5.2.2.4 A utilização do laboratório de informática foi importante para compreender os conteúdos?

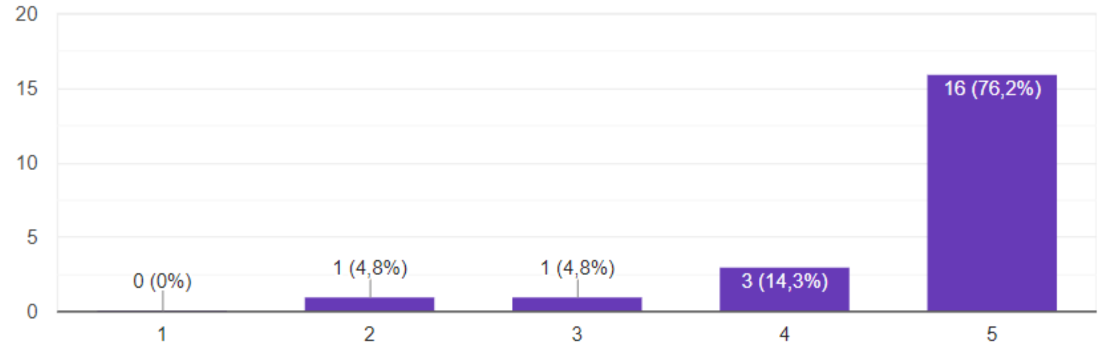


Figura 15 – Resumo das respostas referentes a questão 4 - seção 4

5.2.2.5 O material extra (atividades resolvidas) preparado exclusivamente para a turma foi importante para compreender os conteúdos?

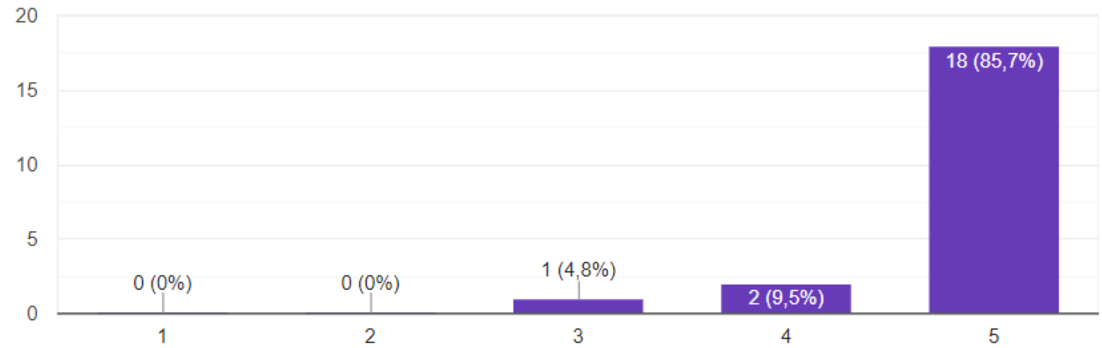


Figura 16 – Resumo das respostas referentes a questão 5 - seção 4

5.2.2.6 A avaliação em 2 etapas foi importante para compreender os conteúdos?

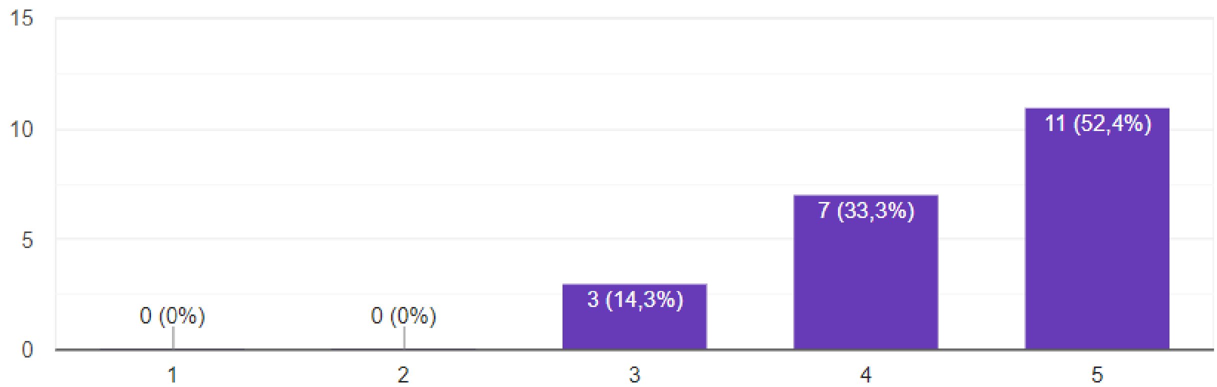


Figura 17 – Resumo das respostas referentes a questão 6 - seção 4

5.2.2.7 A avaliação baseada em problemas (PBL) trabalhada em dupla e com consulta foi importante para aprender os conteúdos?

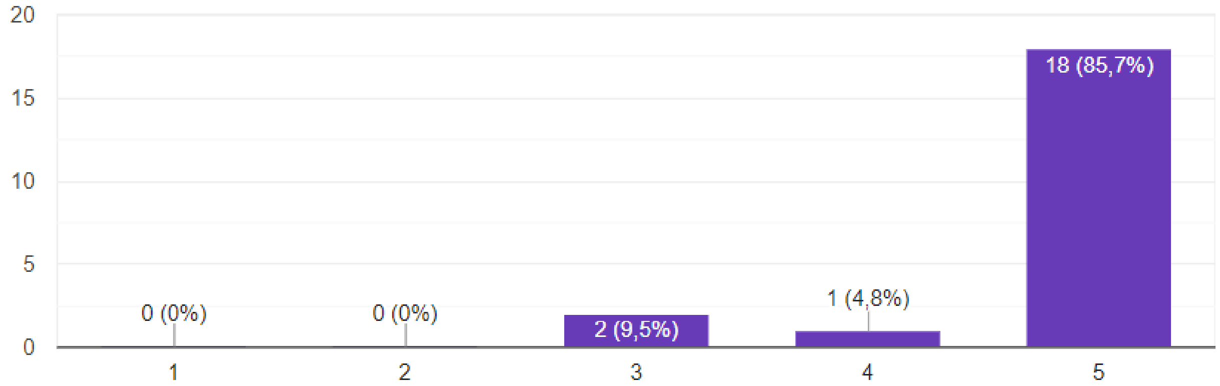


Figura 18 – Resumo das respostas referentes a questão 7 - seção 4

5.2.2.8 A discussão individual sobre a prova foi importante para compreender os conteúdos?

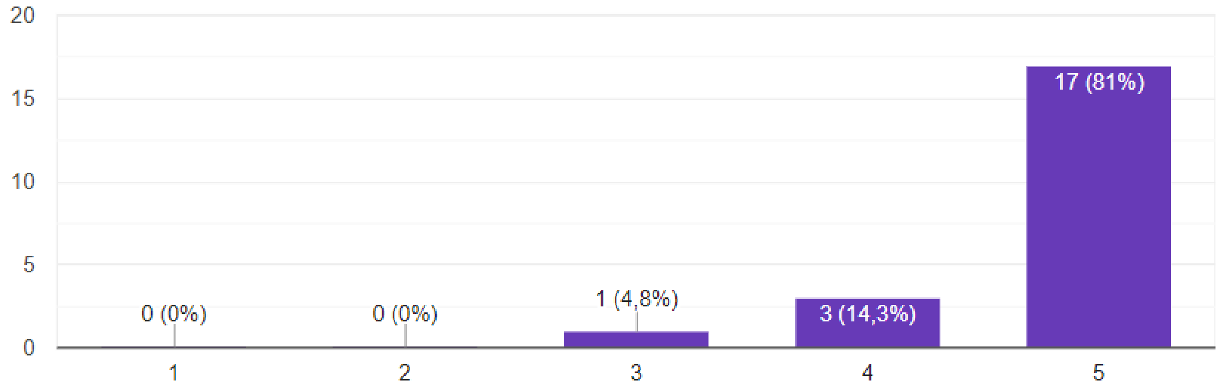


Figura 19 – Resumo das respostas referentes a questão 8 - seção 4

Como se pode observar, os aspectos que geraram maior dispersão foram os assuntos relacionados à linguagem utilizada durantes as aulas. Para diferenciar o teor das respostas das questões 5.2.2.1 e 5.2.2.2, a seguir são apresentadas as observações às referidas perguntas:

- **Questão 5.2.2.1 -** Incluem-se os conhecimentos tecnicos e conceituais previstos na ementa.
- **Questão 5.2.2.2 -** Inclui-se a comunicação do(a) professor(a) com os alunos por meio da língua técnica, com a utilização de jargões e termos característicos.

De fato, a falta de disponibilidade para reposição tornou o tempo disponível para concluir o conteúdo demasiado curto. Apenas 10 horas-aula estavam disponíveis em calendário para que fosse transmitido praticamente tudo a respeito de circunferências e cônicas. Foram realizadas várias tentativas de agendamento de reposição, bem como a preparação de materiai auxiliares utilizando o geogebra, mas dentro do tempo disponível não houve como fazer "milagre". O preço da falta de tempo foi a necessidade de acelerar certos temas, que podem ter confundido os alunos a respeito da linguagem, ou seja, o problema não foi de linguagem inadequada mas de falta de tempo para os alunos se acostumarem com certos termos.

Quanto as questões 5.2.2.3, 5.2.2.4, 5.2.2.5, 5.2.2.7 e 5.2.2.8, houve alto índice de aceitação, reforçando que de fato o contrato social foi cumprido como justificando o bom desempenho alcançado pelos alunos. Especificamente a questão 5.2.2.6 causa certa controvérsia já que na segunda etapa de avaliação (formativa), todos os alunos declararam que a avaliação em 2 etapas foi fundamental, enquanto a resposta no gráfico foi levemente pulverizada.

5.2.3 Seção 5 - Auto-avaliação

5.2.3.1 Como você avalia sua própria participação na disciplina?

OBS: Incluem-se sua assiduidade, pontualidade, dedicação, concentração e esforço.

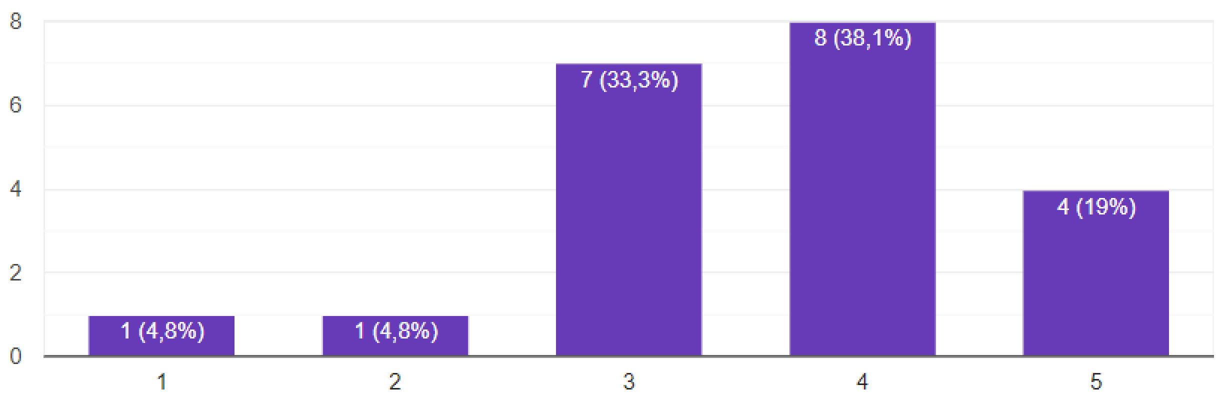


Figura 20 – Resumo das respostas referentes a questão 1 - seção 5

Notamos que a média da auto-avaliação ajuda a explicar um pouco da pulverização de alguns indicadores. De fato a turma vinha de um processo de desmotivação e estagnação e quando encontraram um cenário novo, tiveram certa inércia parase adaptar. Semelhante ao processo submetido ao novo professor que teve que se adaptar em um cenário completamente desconhecido e incerto, muito alunos ficaram perdidos e consequentemente não souberam como lidar.

5.2.3.2 Quais aspectos da sua vida escolar foram influenciados pela disciplina?

OBS: Podem ser marcadas várias alternativas

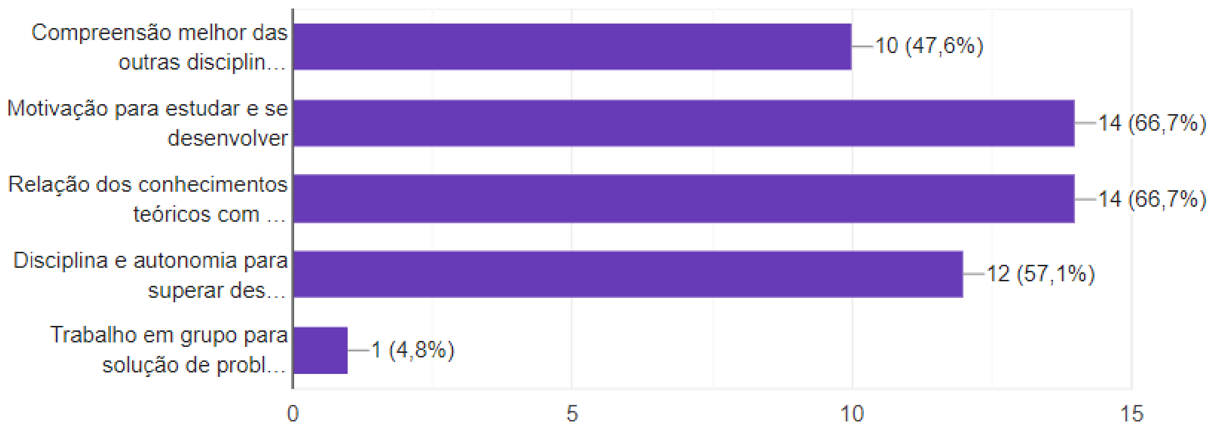


Figura 21 – Resumo das respostas referentes a questão 2 - seção 5

5.2.3.3 Como você avalia a influência da disciplina no seu rendimento escolar?

OBS: Considere as alternativas da questão anterior

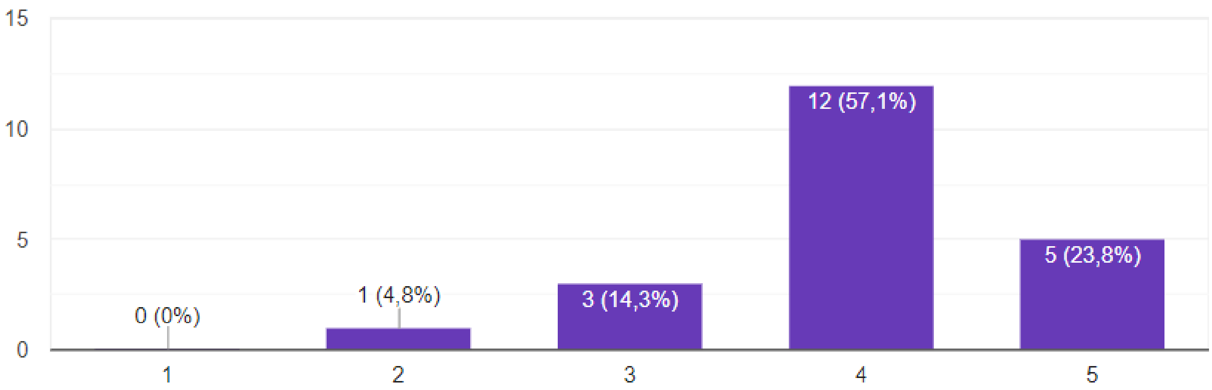


Figura 22 – Resumo das respostas referentes a questão 3 - seção 5

A questão 5.2.3.2 (de carater opcional) teve uma adesão de mais de 65% em alguns quesitos, o que mostra a importância da disciplina no que tange aspectos atitudinais. O impacto no rendimento escolar expresso por 5.2.3.3 mostra a importância de contextualizar o conteúdo dentro de uma perspectiva interdisciplinar.

Analogamente, podemos perceber à partir de 5.2.3.4 e 5.2.3.5 que esses conhecimentos não estão restritos ao ambiente escolar, gerando impacto positivo também em ambiente distintos como pessoal, profissional, familiar, etc... Isso reforça a importância que os conteúdos possúem na nossa formação como indivíduo.

5.2.3.4 Quais desses conhecimentos estão sendo úteis na sua vida pratica?

OBS: Podem ser marcadas várias alternativas

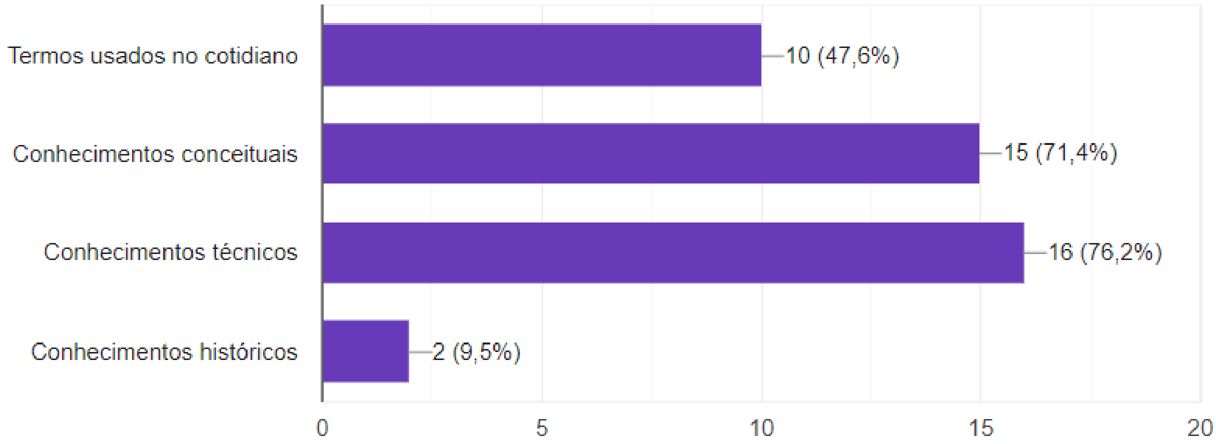


Figura 23 – Resumo das respostas referentes a questão 4 - seção 5

5.2.3.5 Como você avalia a importância desses conhecimentos para a sua vida?

OBS: Considere sua vida fora do ambiente escolar, seja no âmbito pessoal, profissional, familiar, etc...

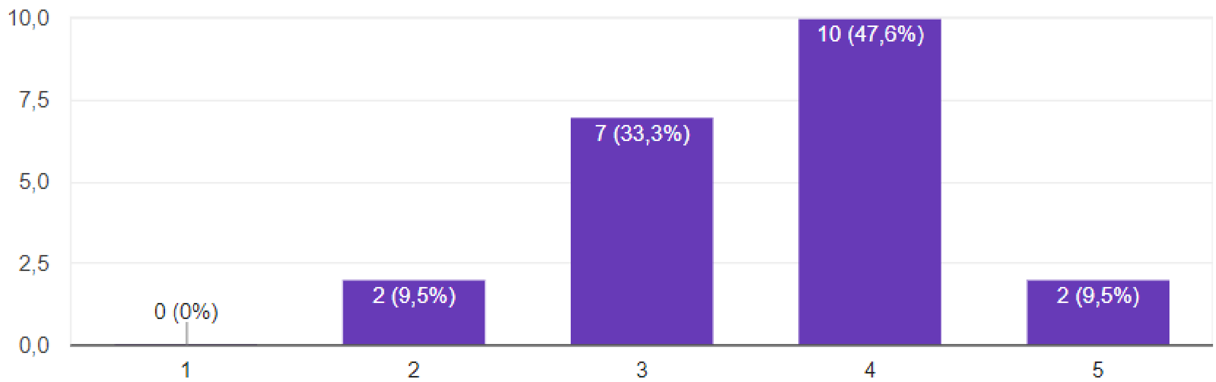


Figura 24 – Resumo das respostas referentes a questão 5 - seção 5

As questões a seguir tem uma característica bastante qualitativa e servem para capturar subjetividades que não são previstas nas questões objetivas. Todas as respostas foram retratadas na íntegra e serão utilizadas como parâmetro para melhorar o processo pedagógico.

5.2.3.6 Conte resumidamente como a disciplina impactou na sua vida:

OBS: Sinta-se a vontade para dar seu relato. ESSA PERGUNTA NÃO É OBRIGATÓRIA.

5.2.3.6.1 Resposta 1

"*Honestamente, eu sempre fui péssima em matemática, pois o modo como a maioria dos professores trabalham didaticamente nunca foi algo com o qual eu me identificasse, mas com o professor Eduardo (até para a minha surpresa) eu vi um outro modo de ver a matemática, um modo no qual eu consigo imaginar e relacionar a matemática na minha vida, com certeza o professor Eduardo foi um divisor de águas para mim nas matérias de exatas, não só na matemática e pretendo levar o seu método de aprendizagem para evoluir não apenas as minhas notas na matéria dele, mas também como algo motivador e incentivador para não bloquear algo na minha cabeça que pareça ser inalcançável.*"

5.2.3.6.2 Resposta 2

"*Ele fez com que eu enxergasse o cotidiano de forma diferente, imagino mais as possibilidades.*"

5.2.3.6.3 Resposta 3

"*Antes de ter essas aulas, eu ainda encontrava dificuldades em compreender a importância da matemática na minha vida pessoal, ms depois comecei a ver que os conhecimentos obtidos em tais aulas ajudam, não só a resolver problemas acadêmicos, como também a entender a matemática da vida.*"

5.2.3.6.4 Resposta 4

"*Me chamou a atenção a dedicação e competência do professor ao ministrar a disciplina de uma forma que fique mais fácil para os alunos absorverem e desenvolverem a matéria.*

Isso me deu uma injeção de ânimo, em uma disciplina que era considerada muito monótona pra mim!"

5.2.3.6.5 Resposta 5

"*relacionar com conceitos da matéria na vida cotidiana é fundamental para o maior interesse dos alunos sobre o conteúdo*"

5.2.3.7 Faça sugestões:

OBS: Sinta-se a vontade para comentar aquilo que você sentiu falta. ESSA PERGUNTA NÃO É OBRIGATÓRIA.

5.2.3.7.1 Resposta 1

"*Senti falta de termos uma aula um pouco mais centrada, digo isso pois as vezes a lousa fica bagunçada e acabamos nos perdendo no raciocínio de anotações e fica uma bola de neve.*"

5.2.3.7.2 Resposta 2

"*Para mim n precisa de sugestões, por ter sido aplicado métodos inovadores e completos para nosso aprendizado.*"

5.2.3.7.3 Resposta 3

"*Trazer como cai nos vestibulares, questões de outros vestibulares, pra grande parte dos alunos o maior foco é saber dessas coisas.*"

6 Conclusão

Conforme apresentado na *Introdução*, os alunos possuiam capacidades bastante restritas ao operacional, apresentando diversas deficiências em relação a abordagem conceitual do conteúdo, o que era crítico visto a natureza abstrata do assunto. O método de avaliação contínua garantia uma média de notas altas, mas cuja eficacia na discussão e solução de problemas não se verificavam na prática.

Além dos problemas intrinsecos exclusivamente ao estado da sala, houveram outros elementos que prejudicaram o andamento das aulas. A contratação tardia deixou disponível pouco tempo para planejamento de atividades, bem como reposição das aulas. Além disso, as orientacões por parte da coordenação sobre os processos de reposição foram vagas e atrasadas, afetando o planejamento. Não houve uma orientação de como deveriam ser conduzidos os processos avaliativos, deixando a impressão que era permitido utilizar outras metodologias (desde que bem embasadas cientificamente).

A falta de orientação combinada com a dificuldade de planejamento (agravada pela convocação tardia) e ainda potencializada pelo estado da turma e a pouca disponibilidade dos alunos complicou bastante o cenário, exigindo medidas de planejamento que, aparentemente, distoam da concepção organizacional e comportamental da coordenação.

À partir desse cenário, foram propostas alternativas conforme expresso na *Parte I - Regencia*, que aparentemente estavam surtindo efeitos positivos e relevantes. Houve uma maior integração da turma nos assuntos apresentados e discutidos em sala, bem como o desenvolvimento de outras capacidades conceituais por conta da utilização de ferramentas computacionais e aprendizagem colaborativa.

O processo de avaliação descrito na *Parte II - Avaliação* foi contínuo e utilizou-se de diversos mecanismos e parâmetros previamente acordados, garantindo transparência e autonomia dentro de um processo democrático. Foi possível mensurar e quantificar o desenvolvimento dos alunos no que se refere a aspectos conceituais, procedimentais e atitudinais.

Como pode ser observado na *Parte III - Resultados*, dentro do cenário conturbado observado a priori, as alternativas foram bastante efetivas, tanto do ponto de vista quantitativo quanto qualitativo. Dentre os resultados quantitativos observados a respeito da avaliação somativa, destacam-se:

- Ausência de notas negativas;
- Aumento significativo da média de notas;

- Redução significativa da dispersão de notas;
- Comportamento gauseano das notas (esperado pela natureza do fenômeno).

Com relação aos aspectos quantitativos e qualitativos relativos a avaliação formativa e reforçados pelo feedback dos alunos, podemos destacar:

- A metodologia proposta causou uma melhora no processo de aprendizagem, no que tange aspectos:
  - motivacionais;
  - conceituais;
  - procedimentais;
  - atitudinais;
- O aumento de motivação teve impacto positivo no desempenho de outras disciplinas;
- Os alunos encontraram correlação entre os assuntos abstratos e a vida real, influenciando em aspectos não-acadêmicos (pessoal, profissional, familiar, etc...)
- A utilização de conceitos em problemas mais avançados (apresentados em aula), criou interesse de alguns alunos por iniciarem o processo de pesquisa científica.

Com relação a aspectos considerados negativos que devem ser reavaliados tanto pelo docente quanto pela coordenação, destacam-se:

- O conteúdo da disciplina (aparentemente) possuí baixa correlação com outros assuntos do curso (percepção dos alunos, diante das metodologias tradicionais);
- O professor pode melhorar aspectos relacionados a didática, linguagem e organização;
- A carga horária está inadequada para a quantidade de conteúdo.

Referências

TACOMA Bridge, 2006 Citado na página 15.

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs> Acesso em: 25 jun. 2019

Ressonância Aeroelástica - Efeito Flutter, 2007 Citado na página 15.

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=3CMlXyV2XnE> Acesso em: 25 jun. 2019

Exemplos de Efeito Flutter ou Ressonância Aeroelástica, 2017 Citado na página 15.

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=jaS1JapiECw> Acesso em: 25 jun. 2019

Flutter effect, 2009 Citado na página 15.

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=fqkck0_q6XA> Acesso em: 25 jun. 2019

PEIXOTO, J. P. ; TEIXEIRA, M. ; COELHO, D. ; MOREIRA, D. ; MOTA, P. S. **Estudos de Caso: O Método ABP Caso Home Concept** Edição Casos do IESF, 2006, Espaço Atlântico Nenhuma citação no texto.

RODRIGUES M. L. V. ; FIGUEIREDO J. F. C. **Aprendizado centrado em problemas.** Medicina, Ribeirão Preto, 29: 396-402, out./dez. 1996. Nenhuma citação no texto.

BERBEL, N. N. **"Problematization"and Problem-Based Learning: different words or different ways?** Interface — Comunicação, Saúde, Educação, v.2, n.2, 1998. Nenhuma citação no texto.

The PBL learning process - <www.pbli.org> Nenhuma citação no texto.

DesMarchais, 2001; van Rossum, 2000; Schwartz, Mennin, Webb, 2001 Nenhuma citação no texto.

Anexos

ANEXO A – Lista sobre circunferência

1. Determine a equação de uma circunferência com centro no ponto $O(-3, 1)$ e raio 3.

2. Determine a equação da circunferência com centro no ponto $O(1, -2)$ e que passa pelo ponto $P(2, 3)$.

3. Verifique se a equação $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$ representa uma circunferência. Em caso afirmativo, de seu centro e seu raio.

4. A equação $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 = 0$ representa uma circunferência. Em caso afirmativo, de as coordenadas do centro e o raio.

5. Os pontos $A(4, -2)$ e $B(2, 0)$ são as extremidades do diâmetro de uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r.

6. Quais são os valores que k pode assumir para que a equação dada a seguir represente uma circunferência?

7. Dados o ponto P e a circunferência λ, determine a posiç de P em relação a λ.

   a) $P(-2, 2)$ e $\lambda : (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$

   b) $P(2, 2)$ e $\lambda : x^2 + y^2 - 10x + 8y - 1 = 0$

   c) $P(3, 1)$ e $\lambda : x^2 + y^2 - 8x - 5 = 0$

8. Dadas uma reta r e uma circunferência λ, verifique a posição relativa de r e λ. Se houver pontos comuns (tangente ou secante), determine esses pontos.

   a) $r : 2x - y + 1 = 0$ e $\lambda : x^2 + y^2 - 2x = 0$

   b) $r : y = x$ e $\lambda : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

   c) $r : \begin{cases} x = t - 4 \\ y = 2 - t \end{cases}$ e $\lambda : x^2 + y^2 - 2x - 6y - 8 = 0$

9. Verifique a posição relativa das duas circunferências dadas. Se forem secantes ou tangentes, determine os pontos comuns:

   a) $\lambda_1 : x^2 + y^2 = 30$ e $\lambda_2 : (x - 3)^2 + y^2 = 9$

   b) $\lambda_1 : x^2 + y^2 - 20x - 2y + 100 = 0$ e $\lambda_2 : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 98 = 0$

   c) $\lambda_1 : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$ e $\lambda_2 : x^2 + y^2 = 1$

   d) $\lambda_1 : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ e $\lambda_2 : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$

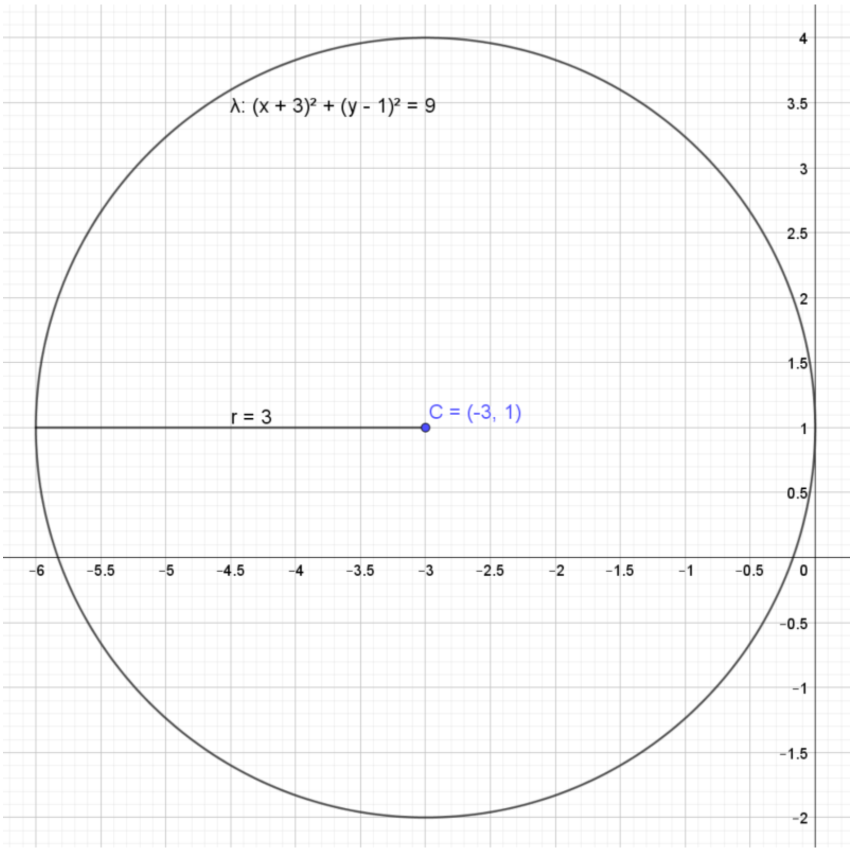
10. O ponto $P(5, 2)$ pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 27 = 0$. Determine a equação da reta t tangente a essa circunferência em P.

11. O ponto $P(1, -2)$ é externo à circunferência de equação $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$. Determine as equações das retas f e t tangentes à circunferência e que passam por P.

Bons Estudos!!!

ANEXO B – Lista resolvida

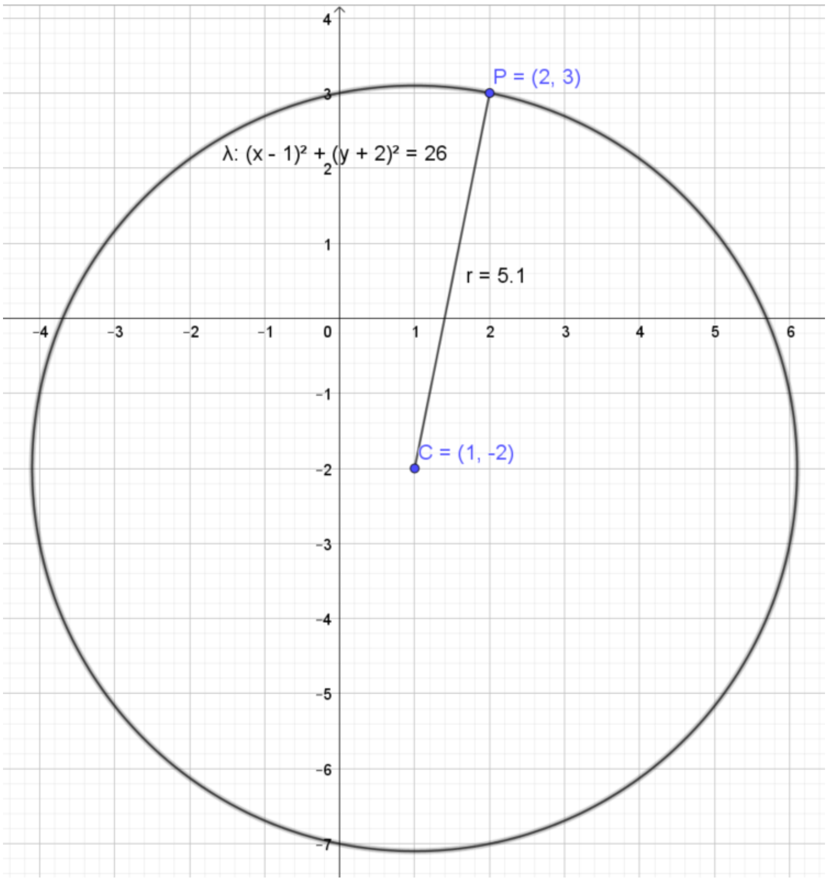
B.1 Determine a equação de uma circunferência com centro no ponto $C(-3, 1)$ e raio $r = 3$.



B.1.1 Definição

$$
\begin{aligned}
(x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \\
(x-(-3))^2 + (y-1)^2 &= 3^2 \\
x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 &= 9 \\
&\therefore \\
x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 &= 0
\end{aligned}
$$

B.2 Determine a equação da circunferência com centro no ponto $C(1, -2)$ e que passa pelo ponto $P(2, 3)$.



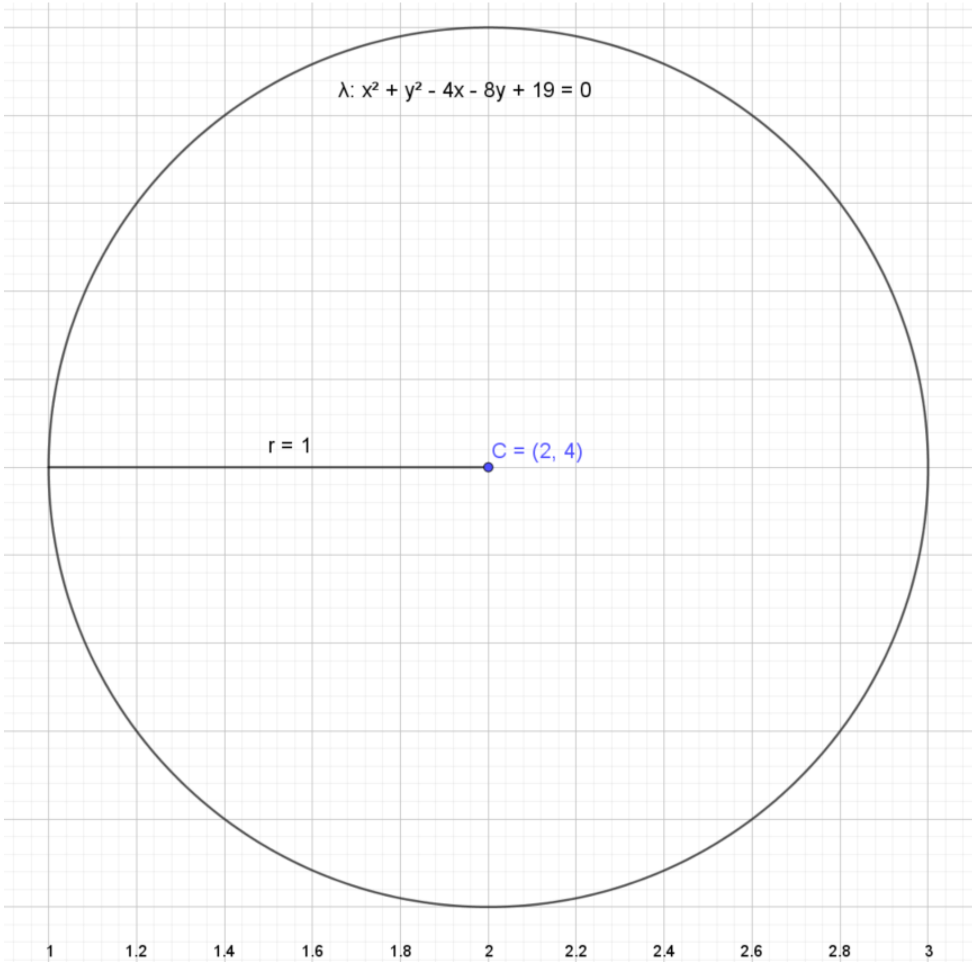
B.2.1 Raio

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\|\overline{AP}\|^2} \\ &= \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2} \\ &= \sqrt{(2-1)^2 + (3-(-2))^2} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

B.2.2 Definição

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$
$$(x-1)^2 + (y-(-2))^2 = \left(\sqrt{26}\right)^2$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 26$$
$$\therefore$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 = 0$$

B.3 Verifique se a equação $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$ representa uma circunferência. Em caso afirmativo, de seu centro e seu raio.



B.3.1 Definição

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 & B = 1 \\ C = 0 & D = -4 \\ E = -8 & F = 19 \end{cases}$$

B.3.2 Teste

$$D^2 + E^2 - 4AF = 16 + 64 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 80 - 72 = 8 > 0$$

$$\begin{cases} A = B & \text{OK} \\ C = 0 & \text{OK} \\ D^2 + E^2 - 4AF > 0 & \text{OK} \end{cases}$$

B.3.3 Parâmetros

$$C = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right) = \left(-\frac{-4}{2 \cdot 1}, -\frac{-8}{2 \cdot 1}\right) = (2, 4)$$

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2} - 4AF}{2\|A\|} = \frac{16 + 64 - 4 \cdot 1 \cdot 19}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

B.3.4 Prova real

$$\begin{aligned} (x-2))^2 + (y-4)^2 &= 1^2 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 &= 1 \\ &\therefore \\ x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 &= 0 \end{aligned}$$

B.4 A equação $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 = 0$ representa uma circunferência. Em caso afirmativo, de as coordenadas do centro e o raio.

B.4.1 Definição

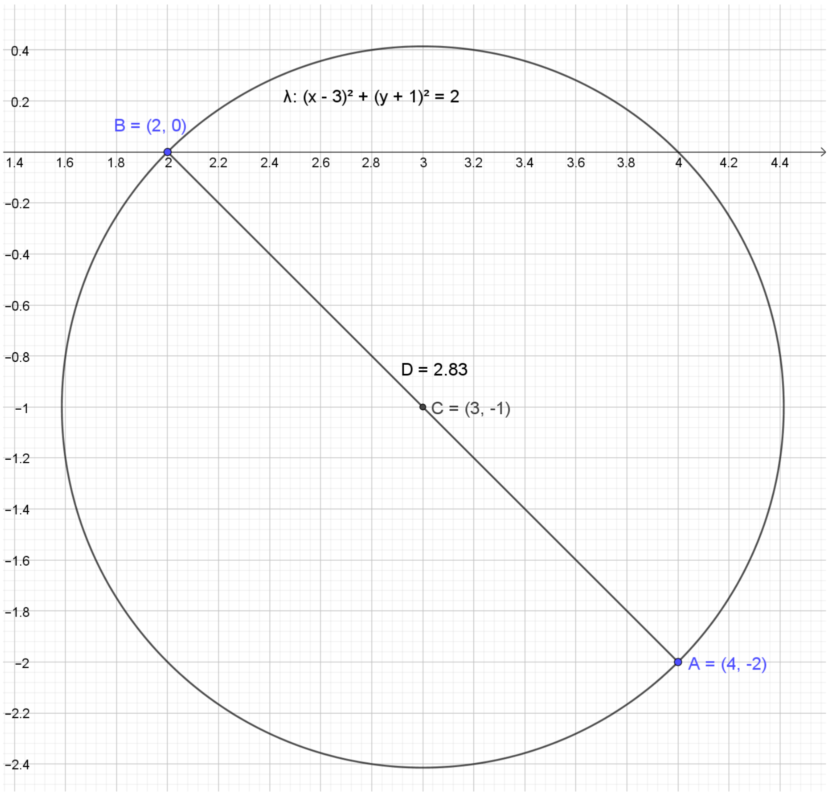
$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 & B = 1 \\ C = 0 & D = -2 \\ E = -2 & F = 6 \end{cases}$$

B.4.2 Teste

$$D^2 + E^2 - 4AF = 4 + 4 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 8 - 24 = -16 < 0$$

$$\begin{cases} A = B & \text{OK} \\ C = 0 & \text{OK} \\ D^2 + E^2 - 4AF > 0 & \text{FALHOU} \end{cases}$$

B.5 Os pontos $A(4,-2)$ e $B(2,0)$ são as extremidades do diâmetro de uma circunferência de centro $C(a,b)$ e raio r. Determine a equação dessa circunferência.



B.5.1 Raio

$$\begin{aligned} D &= \|AB\| \\ &= \sqrt{(4-2)^2+(2-0)^2} \\ &= 2\sqrt{2} \\ &\therefore \\ r &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

B.5.2 Centro

$$\begin{cases} (a-4)^2+(b-(-2))^2 = r^2 \\ (a-2)^2+(b-0)^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-8a+16+b^2+4b+4 = r^2 \\ a^2-4a+4+b^2 = r^2 \end{cases} \tag{B.1}$$

$$\Downarrow$$

$$-4a+4b+16=0 \Rightarrow a=b+4 \tag{B.2}$$

Substituindo B.2 em B.1, temos:

$$
\begin{aligned}
(b+4)^2 - 4(b+4) + 4 + b^2 &= 2 \\
b^2 + 8b + 16 - 4b - 16 + 4b^2 &= 2 \\
2b^2 + 4b + 2 &= 0 \\
b &= \frac{-2 \pm \sqrt{16-16}}{2} \quad \therefore \\
b &= -1 \qquad \text{(B.3)}
\end{aligned}
$$

Substituindo agora, B.3 em B.2, temos que $a = 3$

B.5.3 Equação da circunferência

$$
\begin{gathered}
(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\
\therefore \\
(x-3)^2 + (y+1)^2 = 2
\end{gathered}
$$

B.6 Quais são os valores que k pode assumir para que a equação dada a seguir represente uma circunferência? $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 13k = 0$

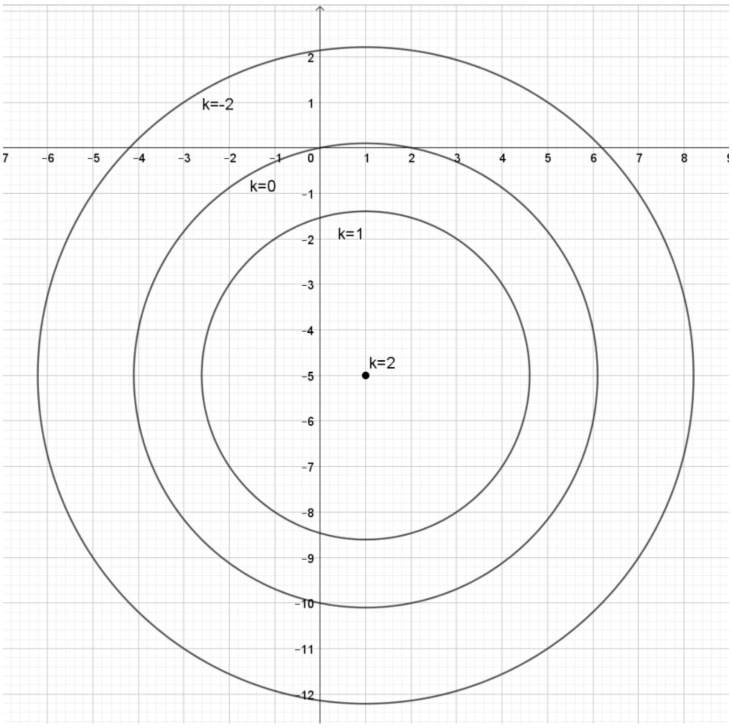
B.6.1 Definição

$$
Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 & B = 1 \\ C = 0 & D = -2 \\ E = 10 & F = 13k \end{cases}
$$

B.6.2 Teste

$$
D^2 + E^2 - 4AF = 4 + 100 - 4 \cdot 1 \cdot 13k = 104 - 52k > 0 \Rightarrow k < \frac{104}{52} \therefore k < 2
$$

$$
\begin{cases} A = B & \text{OK} \\ C = 0 & \text{OK} \\ D^2 + E^2 - 4AF > 0 & \text{OK} \end{cases}
$$



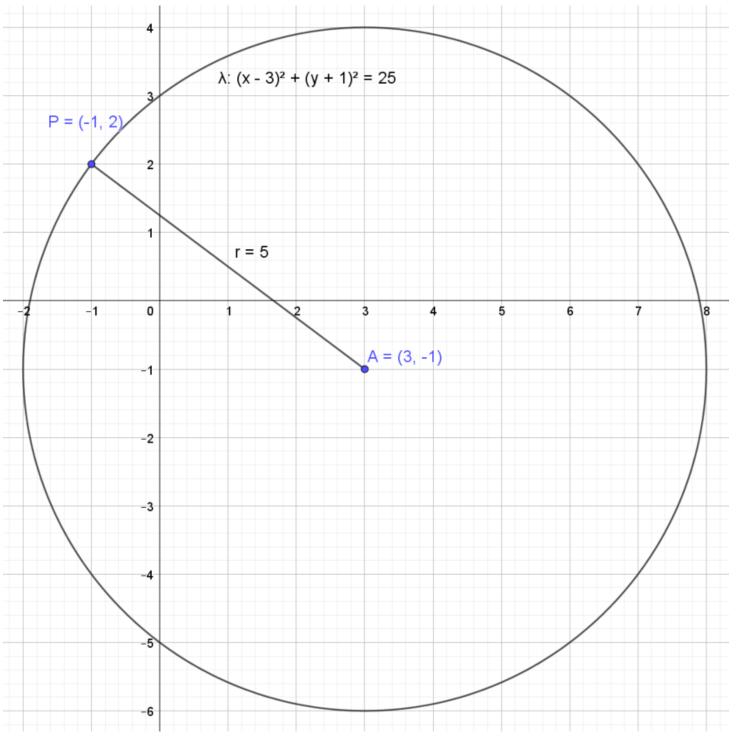
B.7 Determine a posição do ponto P em relação a circunferência λ.

B.7.1 $P(-1, 2)$ e $\lambda : (x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$

$$\begin{cases} C = (3, -1) \\ r = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d_{CP} &= \sqrt{(-1-3)^2 + (2+1)^2} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$d_{CP} = r \Leftrightarrow P \in \lambda$$

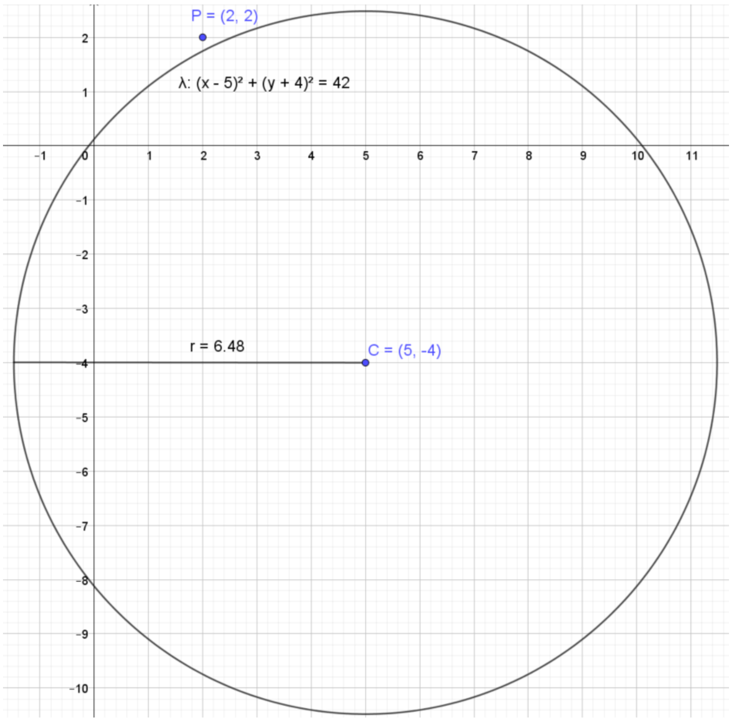


B.7.2 $P(2,2)$ e $\lambda : x^2 + y^2 - 10x + 8y - 1 = 0$

$$\begin{cases} C = \left(\dfrac{-E}{2A}, \dfrac{-E}{2A}\right) \\ \quad = (5, -4) \\ r = \dfrac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2\|A\|} \\ \quad = \sqrt{42} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d_{CP} &= \sqrt{(5-2)^2 + (-4-2)^2} \\ &= \sqrt{45} \end{aligned}$$

$$d_{CP} > r \Leftrightarrow P \text{ é exterior à } \lambda$$

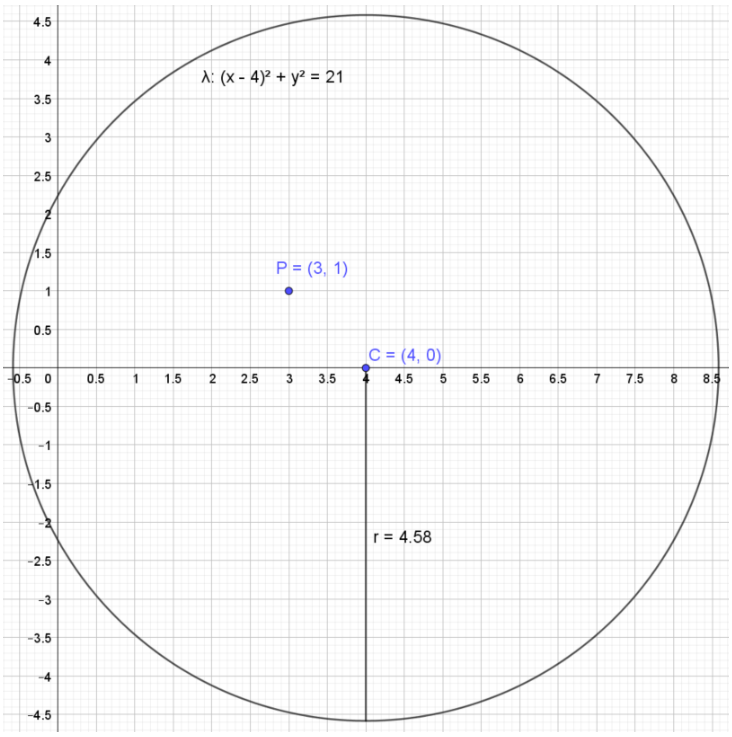


B.7.3 $P(3,1)$ e $\lambda : x^2 + y^2 - 8x - 5 = 0$

$$\begin{cases} C = \left(\dfrac{-E}{2A}, \dfrac{-E}{2A}\right) \\ \quad = (4, 2) \\ r = \dfrac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2\|A\|} \\ \quad = \sqrt{21} \end{cases}$$

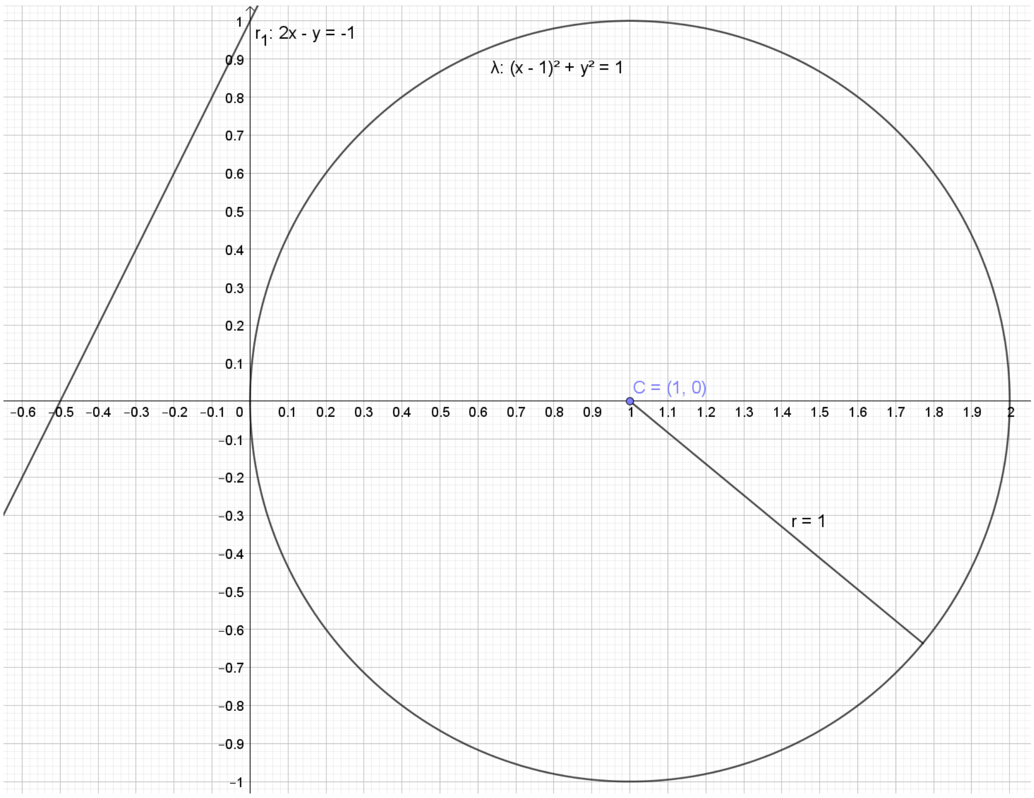
$$\begin{aligned} d_{CP} &= \sqrt{(4-3)^2 + (0-1)^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$d_{CP} < r \Leftrightarrow P \text{ é interior à } \lambda$$



B.8 Dadas uma reta r e uma circunferência λ, verifique a posição relativa de r e λ. Se houver pontos comuns (tangente ou secante), determine esses pontos.

B.8.1 $r : 2x - y + 1 = 0$ e $\lambda : x^2 + y^2 - 2x = 0$



B.8.1.1 Parâmetros da circunferência

$$C = \left(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2A}\right) = \left(\frac{-(-2)}{2}, \frac{-0}{2}\right) = (1, 0)$$

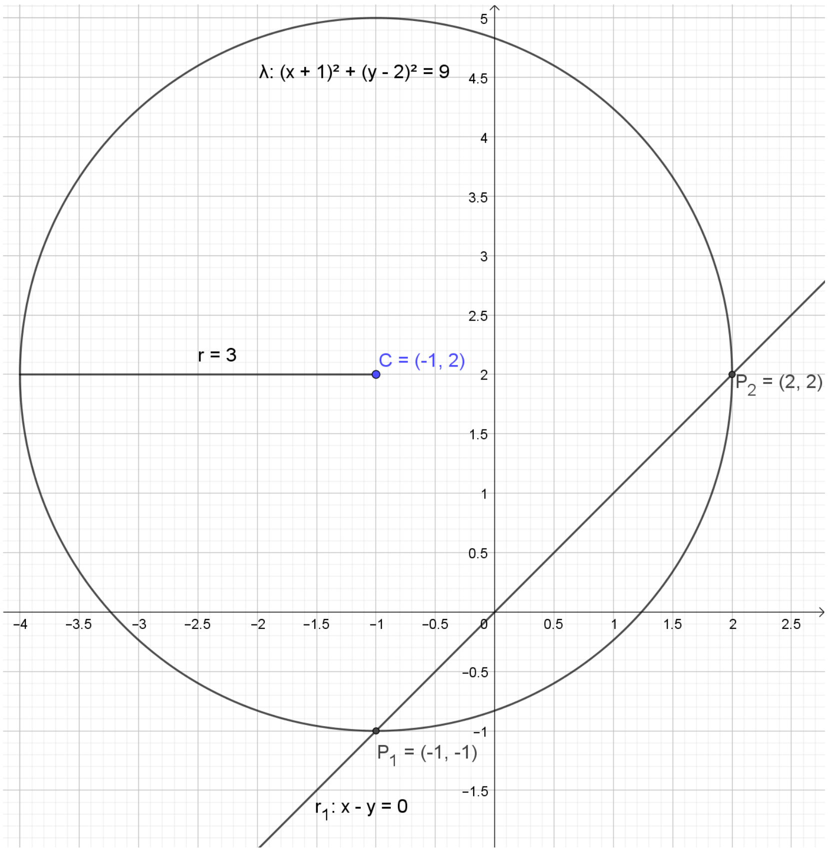
$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2\|A\|} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = 1$$

B.8.1.2 Distância

$$d_{\lambda r} = \left|\frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}\right| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Como $d_{\lambda r} > r$, então r é <u>exterior</u> a λ.

B.8.2 $r : y = x$ e $\lambda : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$



B.8.2.1 Parâmetros da circunferência

$$C = \left(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2A}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{-(-4)}{2}\right) = (-1, 2)$$

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2\|A\|} = \frac{\sqrt{2^2 + 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = 3$$

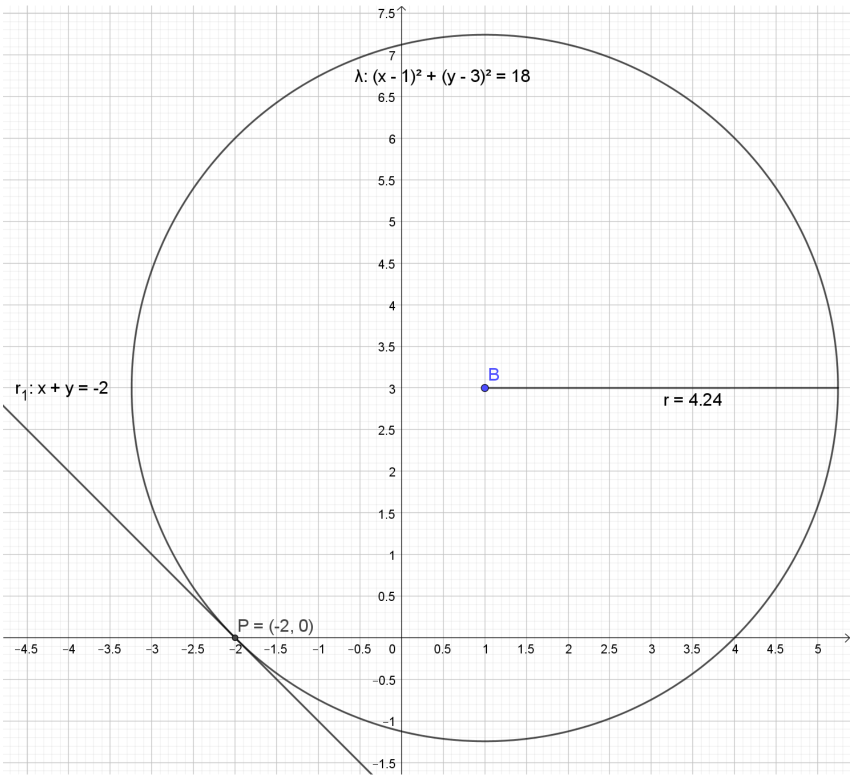
B.8.2.2 Distãncia

$$d_{\lambda r} = \left|\frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 0}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}\right| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Como $d_{\lambda r} < r$, então r é <u>interior</u> (secante) a λ, ou seja, possui dois pontos de intersecção. Para encontrar os pontos, basta substituir a solução de r em λ.

$$r : x = y \Rightarrow x^2 + x^2 + 2x - 4x - 4 = 0 \langle \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{matrix} \quad \therefore \begin{cases} P_1(-1, -1) \\ P_2(2, 2) \end{cases}$$

B.8.3 $r : x = t - 4,\ y = 2 - t$ e $\lambda : x^2 + y^2 - 2x - 6y - 8 = 0$



B.8.3.1 Parâmetros da reta

$$\begin{cases} x = t - 4 \\ y = 2 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = x + 4 \\ t = 2 - y \end{cases} \therefore x + 4 = 2 - y \Rightarrow r : x + y + 2 = 0$$

B.8.3.2 Parâmetros da circunferência

$$C = \left(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2A}\right) = \left(\frac{-(-2)}{2}, \frac{-(-6)}{2}\right) = (1, 3)$$

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2\|A\|} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = 3\sqrt{2}$$

B.8.3.3 Distãncia

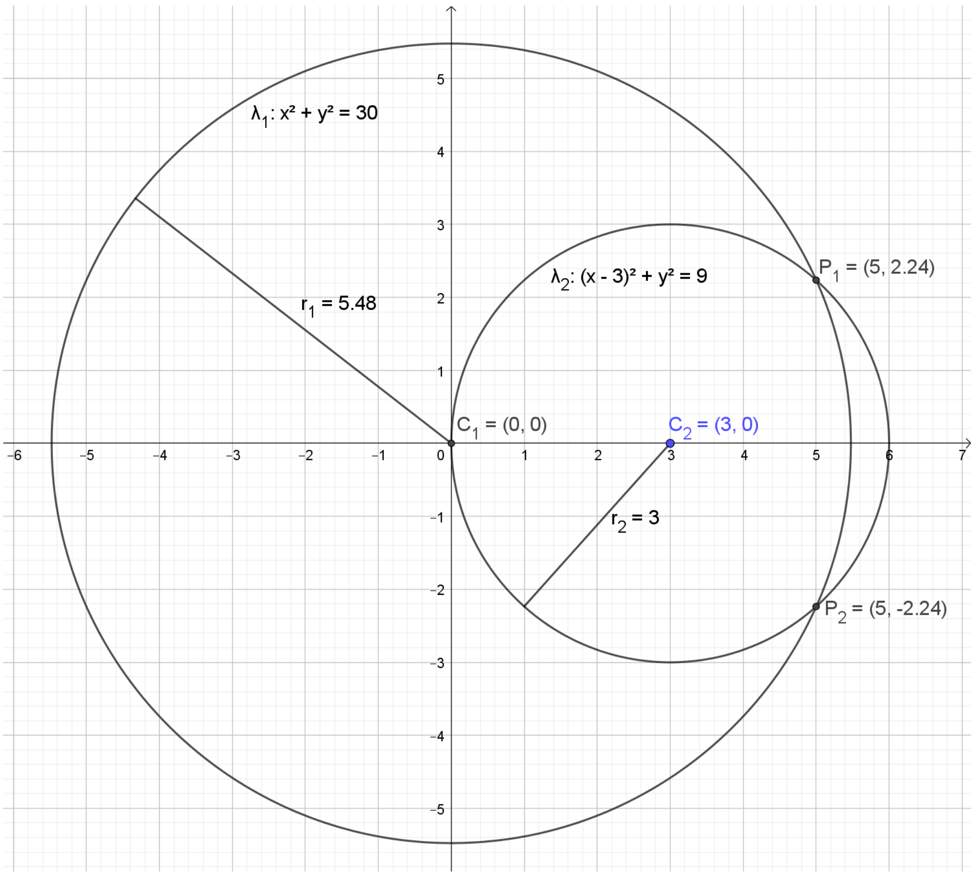
$$d_{\lambda r} = \left|\frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right| = 3\sqrt{2}$$

Como $d_{\lambda r} = r$, então r é <u>tangente</u> a λ, ou seja, possui um ponto de intersecção.

$$r : x = -y - 2 \Rightarrow (-2-y)^2 + y^2 - 2(-2-y) - 6y - 8 = 0 \langle \begin{matrix} x = -2 \\ y = 0 \end{matrix} \therefore P(-2, 0)$$

B.9 Verifique a posição relativa das duas circunferências dadas. Se forem secantes ou tangentes, determine os pontos comuns:

B.9.1 $\lambda_1 : x^2 + y^2 = 30$ e $\lambda_2 : (x-3)^2 + y^2 = 9$



B.9.1.1 Parâmetros das Circunferência

$$\begin{cases} C_1 = (0,0) \\ r_1 = \sqrt{30} \end{cases} \qquad \begin{cases} C_2 = (3,0) \\ r_2 = 3 \end{cases}$$

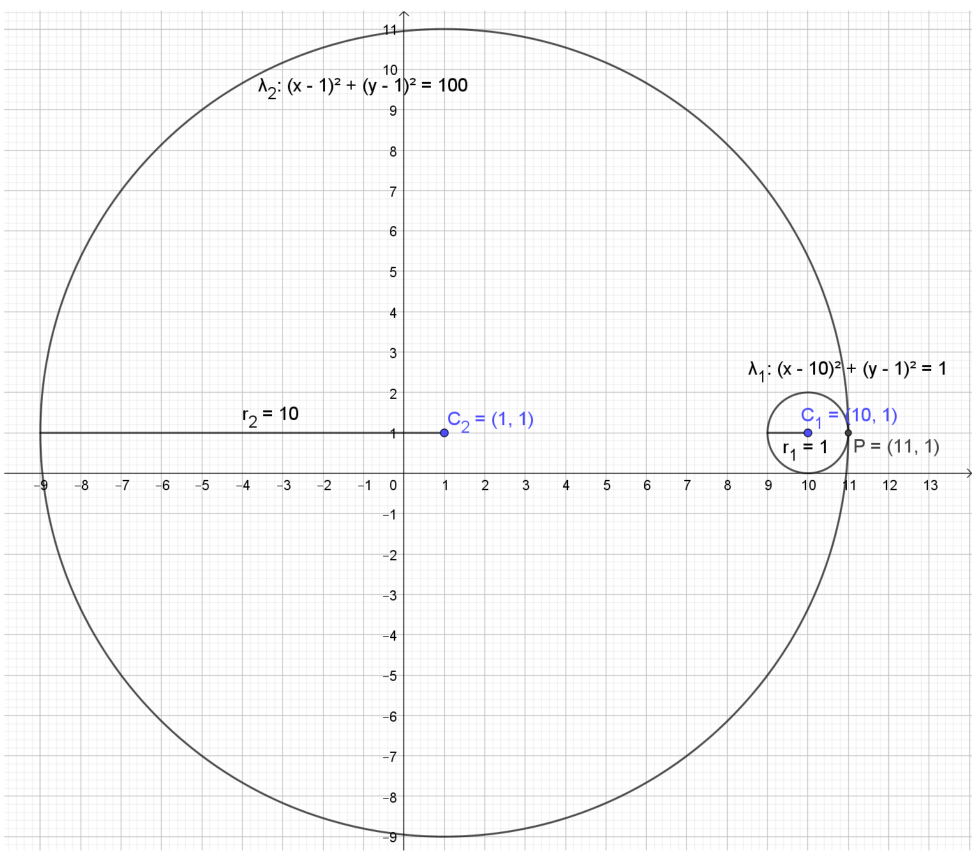
B.9.1.2 Distância

$$d_{\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{3}$$

Como $r_1 < d_{\lambda_1\lambda_2} < r_2$, então λ_1 e λ_2 são secantes, ou seja, possui dois pontos de intersecção. Para encontrar os pontos, basta igualar as 2 equações.

$$x^2 + y^2 - 30 = (x-3)^2 + y^2 - 9 \Rightarrow x = 5 \langle \begin{matrix} y_1 = -\sqrt{5} \\ y_2 = \sqrt{5} \end{matrix} \therefore \begin{cases} P_1(5, -\sqrt{5}) \\ P_2(5, \sqrt{5}) \end{cases}$$

B.9.2 $\lambda_1 : x^2 + y^2 - 20x - 2y + 100 = 0$ e $\lambda_2 : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 98 = 0$



B.9.2.1 Parâmetros das Circunferência

$$\begin{cases} C_1 = \left(\dfrac{-(-20)}{2}, \dfrac{-(-2)}{2}\right) = (10, 1) \\ r_1 = \dfrac{\sqrt{400 + 4 - 400}}{2 \cdot 1} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_2 = \left(\dfrac{-(-20)}{2}, \dfrac{-(-2)}{2}\right) = (1, 1) \\ r_2 = \dfrac{\sqrt{4 + 4 + 392}}{2 \cdot 1} = 1 \end{cases}$$

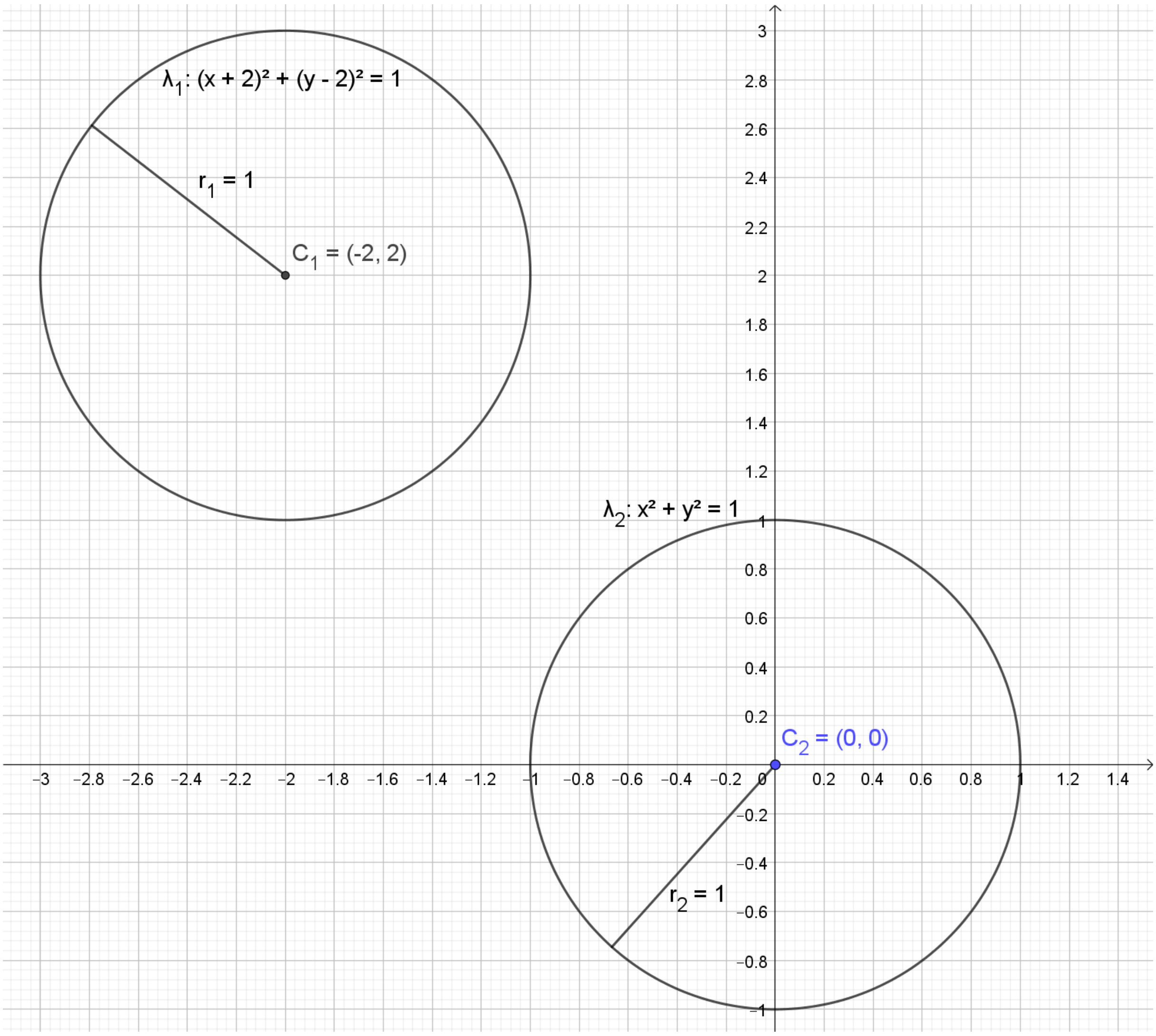
B.9.2.2 Distância

$$d_{\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{(10-1)^2 + (1-1)^2} = 9$$

Como $d_{\lambda_1\lambda_2} = r_1 + r_2$, então λ_1 e λ_2 são tangentes internamente, ou seja, possui um único ponto de intersecção. Para encontrar o pontos, basta igualar as 2 equações.

$$x^2 + y^2 - 20x - 2y + 100 = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 98 \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 1 \end{cases} \therefore P(11, 1)$$

B.9.3 $\lambda_1 : (x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$ e $\lambda_2 : x^2 + y^2 = 1$



B.9.3.1 Parâmetros das Circunferência

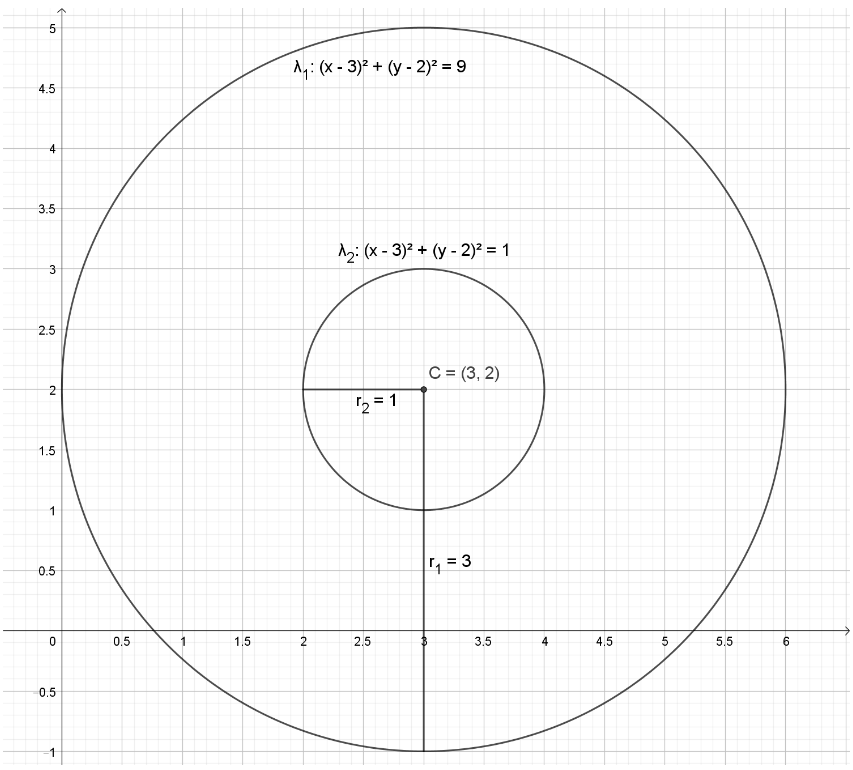
$$\begin{cases} C_1 = (-2, 2) \\ r_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_2 = (0, 0) \\ r_2 = 1 \end{cases}$$

B.9.3.2 Distância

$$d_{\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{(2-0)^2 + (-2-0)^2} = 2\sqrt{2}$$

Como $d_{\lambda_1\lambda_2} > r_1 + r_2$, então λ_1 e λ_2 são exteriores, ou seja, não possuem nenhum único ponto de intersecção.

B.9.4 $\lambda_1 : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$ e $\lambda_2 : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$



B.9.4.1 Parâmetros das Circunferência

$$\begin{cases} C_1 = (3,2) \\ r_1 = 3 \end{cases}$$

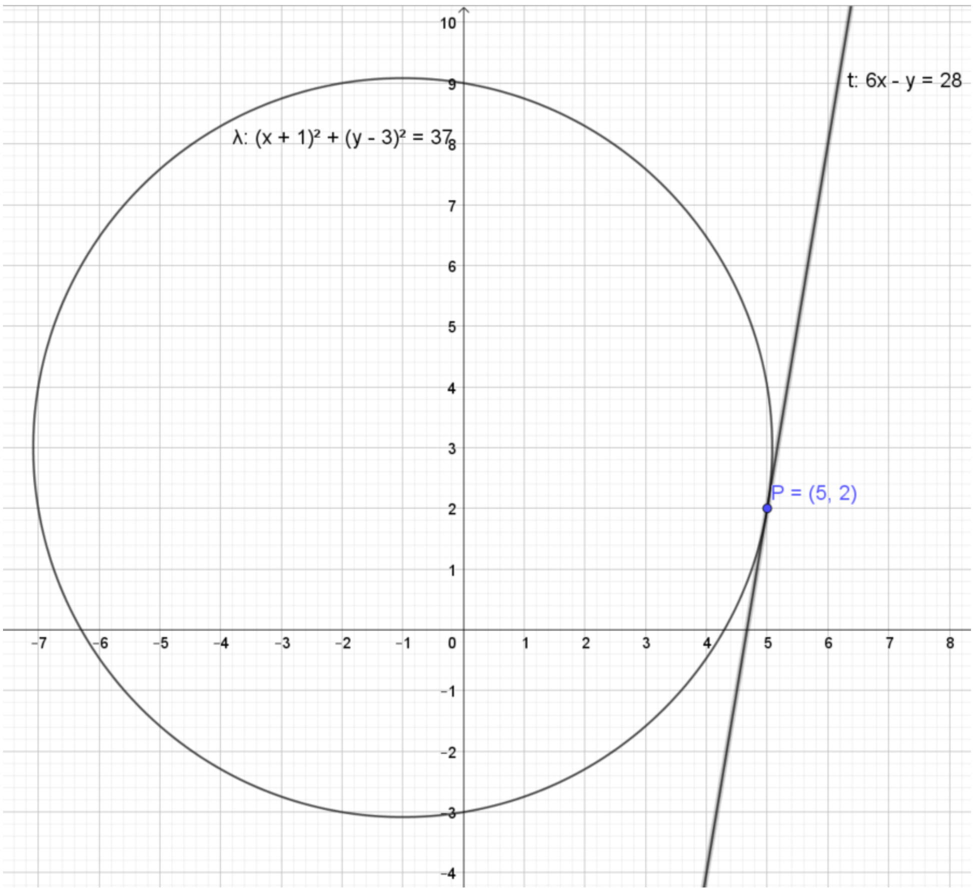
$$\begin{cases} C_2 = \left(\dfrac{-(-6)}{2}, \dfrac{-(-4)}{2}\right) = (3,2) \\ r_2 = \dfrac{\sqrt{36+16-48}}{2\cdot 1} \qquad = \pm 1 \end{cases}$$

B.9.4.2 Distância

$$d_{\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{(3-3)^2 + (2-2)^2} = 0$$

Como $d_{\lambda_1\lambda_2} = 0$, então λ_1 e λ_2 são concêntricos.

B.10 O ponto $P(5,2)$ pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 27 = 0$. Determine a equação da reta t tangente a essa circunferência em P.



B.10.0.1 Parâmetros das Circunferência

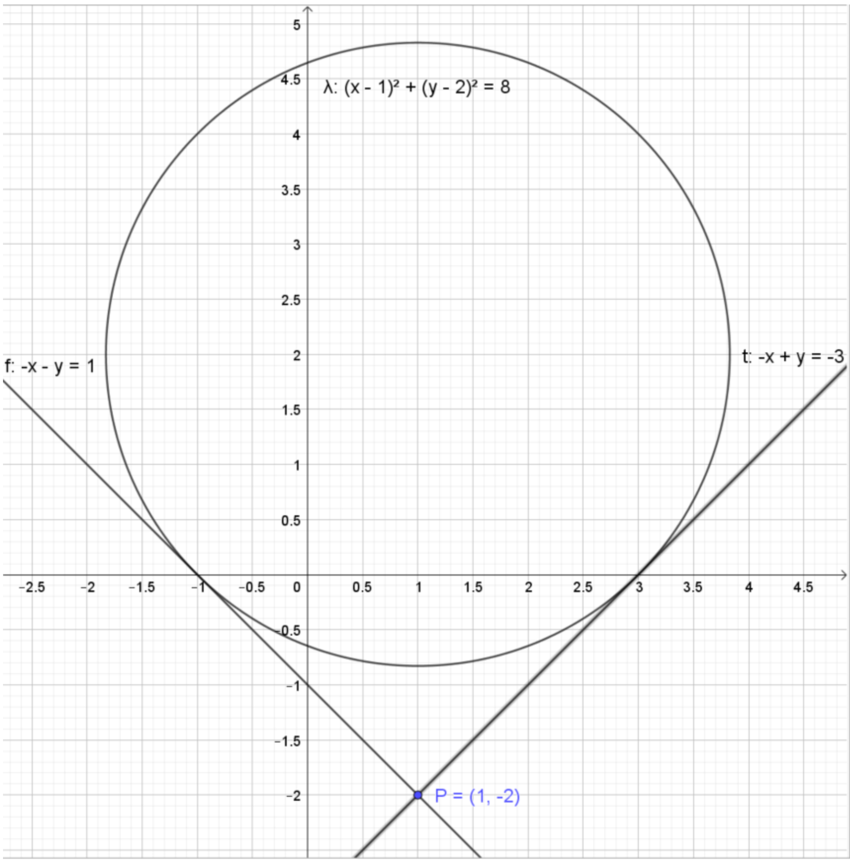
$$\begin{cases} C = \left(\dfrac{-2}{2}, \dfrac{-(-6)}{2}\right) & = (-1,3) \\ r = \dfrac{\sqrt{2^2 + 6^6 - 4 \cdot 1 \cdot (27)}}{2 \cdot 1} & = \sqrt{37} \end{cases}$$

B.10.0.2 Distância

$$d_{\lambda P} = \sqrt{(-1-5)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{37} = r \therefore 1 \text{ solução}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{a - x_0}{y_0 - b} \Rightarrow \frac{y-2}{x-5} = \frac{-1-5}{2-3} \Rightarrow 6x - y - 28 = 0$$

B.11 O ponto $P(1, -2)$ é externo à circunferência de equação $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$. Determine as equações das retas f e t tangentes à circunferência e que passam por P.



B.11.0.1 Parâmetros das Circunferência

$$\begin{cases} C = (1, 2) \\ r = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

B.11.0.2 Distância

$$d_{\lambda P} = \sqrt{(1-1)^2 + (2-(-2))^2} = 4 > r \therefore 2 \text{ soluções}$$

$$y - y_0 = m\,(x - x_0) \Rightarrow y + 2 = m(x-1) \therefore mx - y - (m+2) = 0$$

$$d_{\lambda r} = \left| \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{m \cdot 1 + (-1) \cdot 2 - (m+2)}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} \right| = \frac{4}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{m^2+1}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow m = \pm 1 \therefore \begin{cases} f : x + y + 1 = 0 \\ t : x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

ANEXO C – Atividade sobre circunferências

GeoGebra - Circunferências

1. Construa a circunferência de centro $C(2,3)$ e raio $r = 4$. Qual a equação geral e a equação reduzida dessa circunferência?

2. Construa uma circunferência que passa pelos pontos $A(-1,2)$, $B(3,4)$ e $C(2,-3)$. Qual a equação geral e a equação reduzida dessa circunferência

3. Verifique se as equações, abaixo, representam circunferências. Em caso afirmativo, encontre o centro e o raio dela:

   a) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$

   b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 = 0$

   c) $3x^2 + 3y^2 - 12x - 15y - 6 = 0$

4. Verifique a posição relativa entre as retas e circunferências abaixo. Se forem secantes ou tangentes determine os pontos de interseção:

   a) $r : 2x + y - 1 = 0$ e $\lambda : x^2 + y^2 - 2x - 6y - 8 = 0$

   b) $r : 2x - y + 1 = 0$ e $\lambda : x^2 + y^2 - 2x = 0$

   c) $r : y = x$ e $\lambda : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

5. Verifique a posição relativa das duas circunferências dadas. Se forem secantes ou tangentes, determine os pontos de intersecção:

   a) $\lambda_1 : x^2 + y^2 = 30$ e $\lambda_2 : (x-3)^2 + y^2 = 9$

   b) $\lambda_1 : x^2 + y^2 - 20x - 2y + 100 = 0$ e $\lambda_2 : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 98 = 0$

   c) $\lambda_1 : (x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$ e $\lambda_2 : x^2 + y^2 = 1$

   d) $\lambda_1 : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$ e $\lambda_2 : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$

6. O ponto $P(5,2)$ pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 27 = 0$. Determine a equação da reta t tangente a essa circunferência em P.

7. O ponto $P(1,-2)$ é externo à circunferência de equação $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$. Determine as equações das retas f e t tangentes à circunferência e que passam por P.

Bons Estudos!!!

ANEXO D – Atividade sobre cônicas

GeoGebra - Cônicas

D.1 Construção da Elipse

Método 1

1. Marque dois pontos no centro da tela e atribua a eles os nomes F_1 e F_2.

2. Construa no canto inferior direito da tela um segmento de reta $\overline{AB}$. (Obs.: O comprimento de $\overline{AB}$ deve ser estritamente menor que o comprimento de $\overline{F_1F_2}$.

3. Marque um ponto C sobre o segmento de reta $\overline{AB}$. Nomeie esse segmento de $2a$.

4. Use o compasso para traçar uma circunferência de centro F_1 e raio AC e outra circunferência de centro F_2 e raio CB.

5. Determine a interseção: $C\,(F_1, AC) \cap C\,(F_2, CB) = \{P, Q\}$.

6. Analise quais os valores de $d\,(P, F_1) + d\,(P, F_2)$ e de $d\,(Q, F_1) + d\,(Q, F_2)$ em função da medida $2a$.

7. Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto P e selecione "habilitar rastro". Faça o mesmo com o ponto Q.

8. Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto C e clique em "Animar".

9. Observe o que acontece. Qual figura é essa? Qual a propriedade comum a todos os pontos dessa figura?

10. Use o conceito de lugar geométrico plano para definir elipse.

11. Você pode usar a ferramenta lugar geométrico para construir a elipse também.

    a) Clique no quarto botão e selecione a opção "lugar geométrico".

    b) Clique no ponto P e depois no ponto C (ele vai mostrar o que acontece com P quando variamos C. Faça o mesmo com o ponto Q.

Método 2

1. Construir uma circunferência c_1 de centro F_1 e raio arbitrário.
2. Marcar um ponto F_2 interior à circunferência c_1, distinto do centro F_1.
3. Marcar um ponto A sobre a circunferência.
4. Construir a circunferência que tangencia internamente a circunferência c_1 em A e passa por F_2 e nomeá-la de c_2.

   Obs: o centro de c_2 está na interseção da reta que passa por A e por F_1 e da mediatriz do segmento de reta $\overline{AF_2}$.
5. Marcar o centro de c_2 e nomeá-lo O.
6. Utilizando o recurso "lugar geométrico", desenhar a trajetória do Ponto O quando o ponto A se move sobre a circunferência c_1.
7. Escreva o enunciado do lugar geométrico que acabou de traçar.
8. Mudar o ponto F_2 para diversas posições diferentes, inclusive fazendo $F_1 = F_2$ e F_2 na circunferência c_1 e, para cada uma dessas posições escolhidas, fazer o lugar geométrico dos centros das circunferências c_2 quando movimentamos o ponto A sobre c_1. Colocar também o ponto F_2 fora de c_1 para observar o que acontece.
9. Que conclusões podem ser tiradas?

D.2 Construção da Hipérbole

1. Construir uma reta r e um ponto F que não pertence à reta.
2. Marcar um ponto Q na reta r.
3. Construir a mediatriz do segmento $\overline{FQ}$ e nomeá-lo m.
4. Construir a perpendicular à reta r passando por Q e nomeá-la s.
5. Marcar o ponto interseção de m e s e nomeá-lo P.
6. Utilizando o recurso "lugar geométrico", desenhar a trajetória do ponto P quando o ponto Q se move na reta r.
7. Movimentar o ponto F e observar as modificações da figura.
8. Movimentar o ponto Q e observar o que acontece com o ponto P.
9. Escreva a definição de parábola como sendo um lugar geométrico plano.

D.3 Construção da Parábola

1. Marcar dois ponto F_1 e F_2 e, em um canto da janela de desenho, construir um segmento de medida $2a$. A distância entre F_1 e F_2 deve ser estritamente maior que o comprimento do segmento.

   Observação: Os passos a seguir têm o objetivo de construir um ponto P que satisfaça a seguinte condição: A distância entre P e F_1 menos a distância entre P e F_2, em valor absoluto, é igual a $2a$.

   $$|d\,(P, F_1) - d\,(P, F_2)| = 2a$$

2. Construir a circunferência de centro F_1 e raio $2a$.
3. Marcar um ponto A na circunferência.
4. Construir a semirreta de origem F_1 passando pelo ponto A.
5. Construir a mediatriz do segmento $\overline{AF_2}$ e nomeá-la m.
6. Marcar a interseção da semi-reta e a mediatriz m e nomeá-la P.
7. Construir a mediatriz do segmento $\overline{F_1F_2}$, nomeando-a s.
8. Marcar o simétrico do ponto P em relação à reta s, nomeando-o P'.
9. Utilizando o recurso "lugar geométrico", desenhar as trajetórias dos pontos P e P' quando A se move na circunferência.
10. Justificar a construção, mostrando que os pontos P e P' satisfazem a condição desejada, isto é, a distância entre P e F_1 menos a distância entre P e F_2, em valor absoluto, é igual a $2a$, e o mesmo vale para o ponto P'.

    $$|d\,(P, F_1) - d\,(P, F_2)| = 2a$$

11. Movimentar o ponto A na circunferência e observar a trajetória dos pontos P e P'.

Bons Estudos!!!

ANEXO E – Avaliação Procedimental

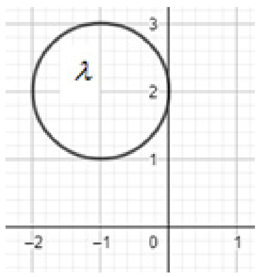
1. (<u>1 ponto</u>) (Concurso IFSP-2018) Ao trabalhar com a representação geométrica de equações em uma turma do Ensino Médio, por meio do software GeoGebra, um professor propôs a seguinte tarefa:

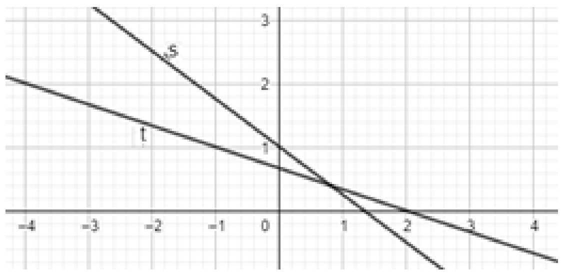
   a) Construa a circunferência cuja equação normal é $\lambda : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

   b) Construa as retas $\begin{cases} s: & 3x + 4y + 4 = 0 \\ t: & 2x + 6y = 4 \end{cases}$

   c) Em seguida encontre a posição entre a circunferência λ e as retas s e t.

   No decorrer das construções no GeoGebra, o professor escolheu duas imagens (antes da finalização da tarefa) com o intuito de problematizar as resoluções dos alunos. Essas discussões foram realizadas ao final da aula, no processo de sistematização da atividade. A seguir apresentamos as imagens escolhidas pelo professor:





   Considerando as escolhas do professor e os resultados corretos das atividades propostas, é correto afirmar que:

   a) O professor escolheu a Imagem 1, pois ela representa corretamente a circunferência λ. A escolha da Imagem 2 representa corretamente as retas s e t. Na resolução correta, as retas s e t são secantes a circunferência λ.

   b) O professor escolheu a Imagem 1, pois ela representa corretamente a circunferência λ. Contudo a Imagem 2 não representa corretamente as retas s e t. Na resolução correta, as retas s e t são tangentes a circunferência λ.

   c) O professor escolheu a Imagem 1, pois ela não representa corretamente a circunferência λ. A Imagem 2 também não representa corretamente as retas s e t. Na resolução correta, as retas s e t são tangentes a circunferência λ.

d) O professor escolheu a Imagem 1, pois ela não representa corretamente a circunferência λ. A Imagem 2 também não representa corretamente as retas s e t. Na resolução correta, as retas s e t são exteriores a circunferência λ.

2. (3 pontos) Verifique a posição relativa entre os seguintes objetos:

$$\begin{cases} S_1: & (x-1)^2+(y+1)^2 = & 1 \\ S_2: & x^2+y^2+2x+2y = & -1 \\ S_3: & x^2+y^2-2y = & 0,56 \\ f: & 2x+4y = & 2,47 \\ g: & 2x+4y = & -6,47 \end{cases}$$

C_x	C_y	r		A	B	C	D	E	F
			S1						
			S2						
			S3						
			f						
			g						

Caso			$d(O_1,O_2)$	raio(s)	Relação entre O_1 e O_2	P_1	P_2
1	S_1	S_2					
2	S_1	S_3					
3	S_1	f					
4	S_1	g					
5	S_2	S_3					
6	S_2	f					
7	S_2	g					
8	S_3	f					
9	S_3	g					
10	f	g					

Dicas:

- Classifique e esboce as circunferências
- Se existirem, calcule os pontos de intersecção (ou a família de pontos)
- Observe a relação entre os pontos encontrados com f e g.

3. (1 ponto) (Concurso IFSP-2017) A função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é representada por uma hipérbole, sendo os eixos x e y as assíntotas. As coordenadas dos focos dessa hipérbole são $F_1 : \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ e $F_2 : \left(\sqrt{-2}, \sqrt{-2}\right)$. Qual a equação que correspondo a uma rotação de 45° nessa hipérbole? (apresente todos os calculos necessários para chegar ao resultado)

   a) $y^2 - x^2 = 1$

   b) $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{2} = 1$

   c) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

   d) $\dfrac{y^2}{8} - \dfrac{x^2}{8} = 1$

4. (3 pontos) Sejam as curvas a seguir parametrizadas em $\mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
C_1 : \quad (x-1)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} &= 1 \\
C_2 : \quad \frac{(y-1)^2}{4} - (x+1)^2 &= 1 \\
C_3 : \quad y^2 + 3x &= 0
\end{aligned}
$$

   a) Classifique-as, e apresente os parâmetros importantes respectivos.

   b) Utilize essas informações para traçar um esboço de cada curva.

   c) Caso existam, calcular os pontos de intersecção (se os valores encontrados forem numéricamente complicados, esboçar a curva que contém esses pontos).

5. (2 ponto) Comente sobre a importância da geometria analítica:

   a) Na prática docente, seja no ensino de matemática como em outras áreas.

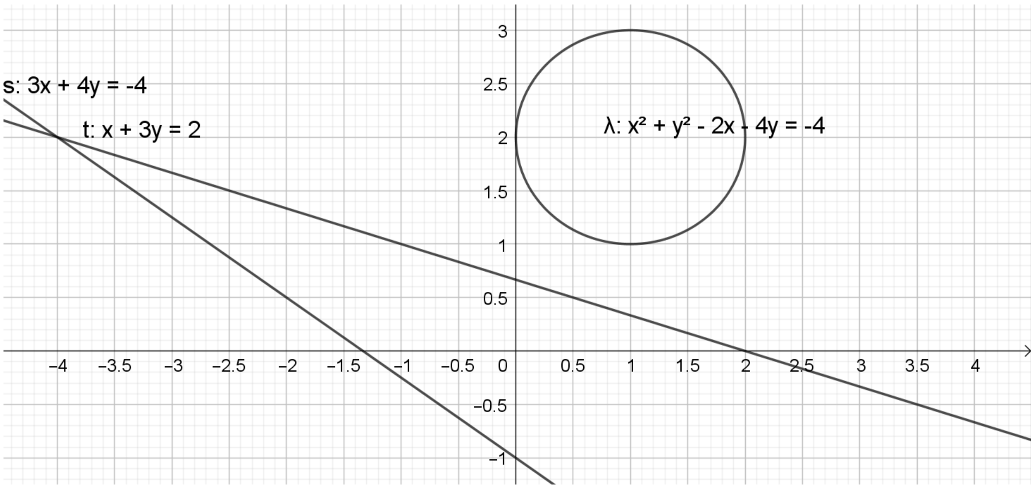
   b) Em problemas práticos, seja em problemas acadêmicos ou da vida prática.

Boa Prova!!!

ANEXO F – Gabarito da Avaliação

Questão 1

Aplicando os conceitos estudados em aula, é imediato perceber que ambos os desenhos apresentados não correspondem às respectivas equações. Portanto a alternativa correta é a d).



Questão 2

Passo 1: Identificação dos parâmetros das curvas

Curva S_1: $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 0$

Curva S_2:

$$C_2 = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right) \quad \Rightarrow C_2 = (-1, -1)$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2\|A\|} \quad \Rightarrow r_2 = 1$$

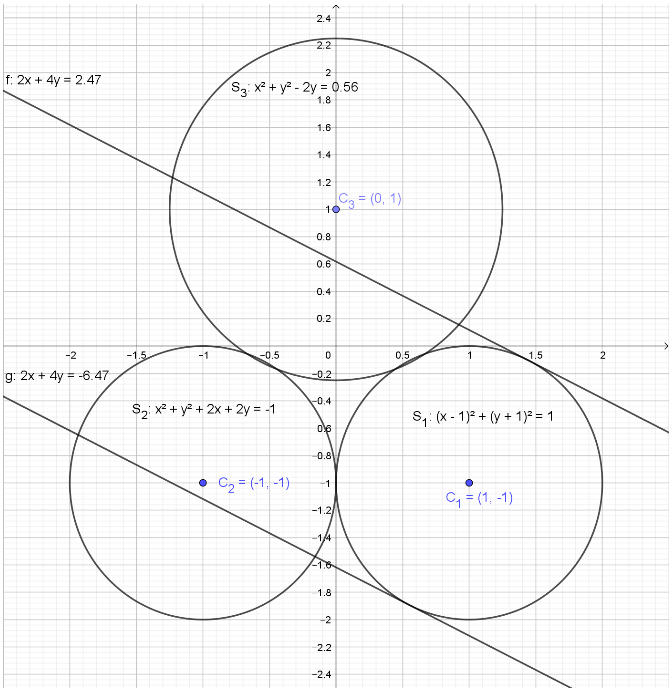
Curva S_3:

$$C_3 = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right) \quad \Rightarrow C_3 = (0, 1)$$

$$r_3 = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2\|A\|} \quad \Rightarrow r_3 = 1,25$$

C_x	C_y	r	Objeto	A	B	C	D	E	F
1	-1	1	S_1	1	1	0	-2	2	1
-1	-1	1	S_2	1	1	0	2	2	1
0	1	1,25	S_3	1	1	0	0	-2	-0,56
-	-	-	f	2	4	-2,47	-	-	-
-	-	-	g	2	4	6,47	-	-	-

Passo 2: Seguindo a primeira dica dada na prova, **"Classifique e esboce as circunferências"**.



Distância $d(O_1, O_2)$**:**

$$\sqrt{(O_{1x} - O_{2x})^2 + (O_{1y} - O_{2y})^2} = 2$$

$\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$ Tangentes exteriores

Distância $d(O_1, O_3)$**:**

$$\sqrt{(O_{1x} - O_{3x})^2 + (O_{1y} - O_{3y})^2} = 2,24$$

$\overline{O_1O_3} < r_1 + r_3 = 2,25$ Secantes

Distância $d(O_2, O_3)$**:**

$$\sqrt{(O_{2x} - O_{3x})^2 + (O_{2y} - O_{3y})^2} = 2,24$$

$\overline{O_2O_3} < r_2 + r_3 = 2,25$ Secantes

Passo 3: Seguindo a segunda dica dada na prova, **"Se existirem, calcule os pontos de intersecção (ou a família de pontos)"**.

$$S_1 = S_2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 \therefore x = 0$$

Aplicando $x = 0$ em S_2 (por exemplo), temos $y^2 + 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$. Portanto o ponto de tangência é $P_{1,2} = (0, -1)$, o que é visualmente intuítivo.

$$S_1 = S_3 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 2y \therefore 2x + 4y = -1,56$$

Passo 4: Seguindo a terceira dica dada na prova, **"Observe a relação entre os pontos encontrados com f e g"**.

A reta obtida a partir da intersecção da S_1 com S_3 represente a familia de pontos, cujos pontos de intersecção pertencem. Notamos ainda que ela é paralela à f e g.

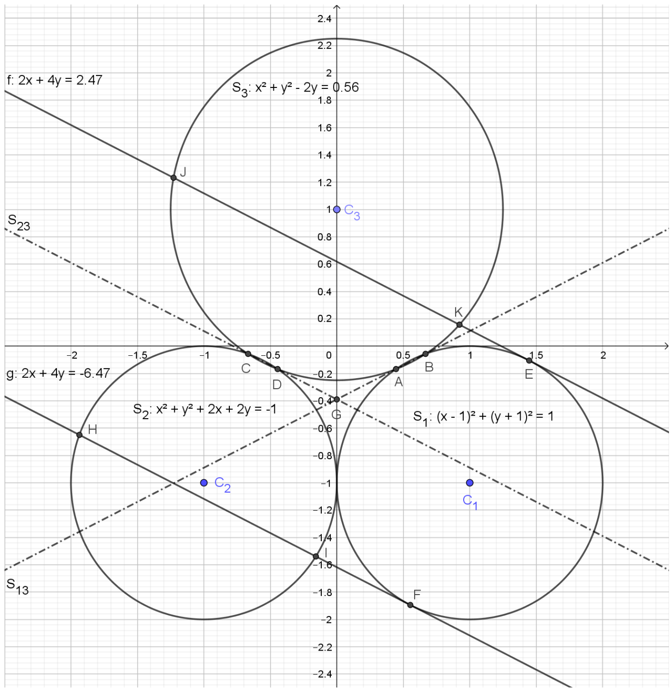
Para finalizar o esboço, basta calcular em que pontos a reta f e g interceptam S_1.

$$d_{f,S_1} = \frac{\|A_f \cdot O_{1x} + B_f \cdot O_{1y}b + C_c\|}{\sqrt{A_f^2 + B_f^2}} = \frac{\|2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) - 2,47\|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{-4,41}{\sqrt{20}} \Rightarrow d_{f,S_1} = -1$$

$$d_{g,S_1} = \frac{\|A_f \cdot O_{1x} + B_f \cdot O_{1y} b + C_c\|}{\sqrt{A_f^2 + B_f^2}} = \frac{\|2 \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) + 6,47\|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{4,41}{\sqrt{20}} \Rightarrow d_{g,S_1} = 1$$

Como $d_{f,S_1} = d_{g,S_1} = r_1$, sabemos que ambas as retas são tangentes.

		d	$2r/r$	Relação
S1	S2	2	2	Tg exterior
S1	S3	2,24	2,25	Secante
S1	f	1,00	1,00	Tangente
S1	g	1,00	1,00	Tangente
S2	S3	2,24	2,25	Secante
S2	f	1,89	1,00	Exterior
S2	g	0,11	1,00	Secante
S3	f	0,34	1,00	Secante
S3	g	2,34	1,00	Exterior
f	g			Paralela



Apesar dos pontos de intersecão restantes serem numericamente mais complicados de calcular, visualmente é simples classificar as retas em relação as circunferências.

O mais importante nesse exercícios é seguir as dicas para enxergar as simetrias e distâncias com valores numericamentes simples. A solução se torna bastante direta, tornando desnecessário calculos excessivos uma vez que se utilizou-se conceitos para filtrar o problema.

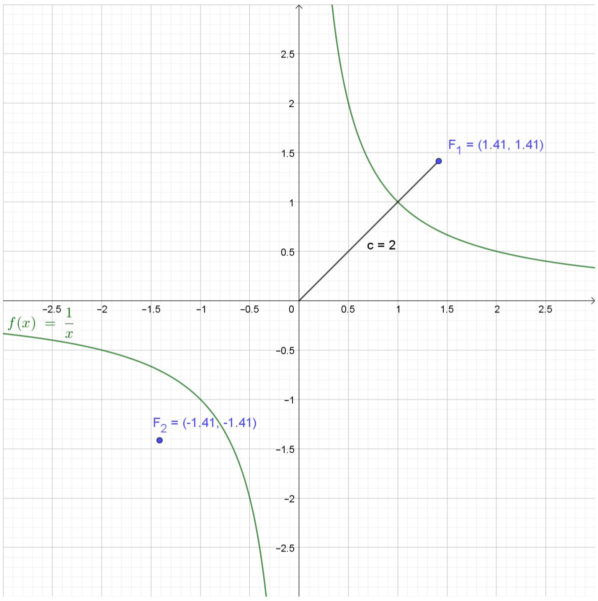
Questão 3 - Rotação de 45º da função $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} F_1 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \\ F_2 = \left(\sqrt{-2}, \sqrt{-2}\right) \end{cases}$

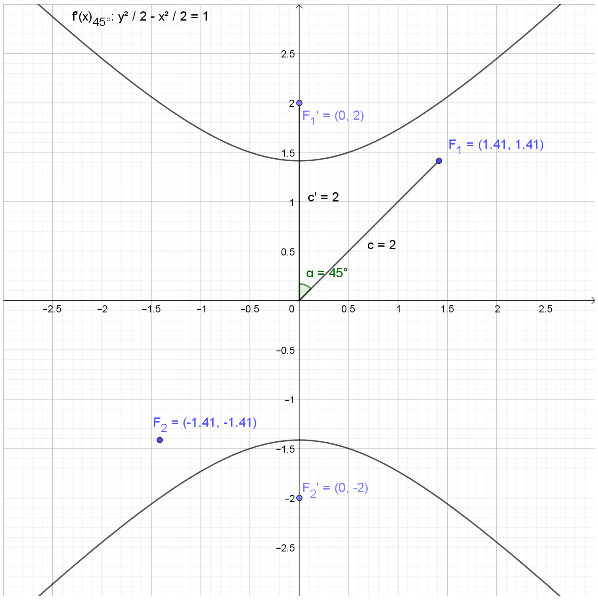
Calculando metade da distância focal, ou seja, a distância entre um dos focos e a origem, temos:

$$c = \sqrt{(x_f - x_0)^2 + (y_f - y_0)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2} - 0\right)^2 + \left(\sqrt{2} - 0\right)^2} \Rightarrow c^2 = 4$$

Como a elipse é simétrica, podemos afirmar que $a = b$. Aplicando a relação pitagórica, temos:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2 \\ b^2 = 2 \end{cases}$$





Questão 4

Passo 1: Classificação e parâmetros importantes

$$\text{Elipse } C_1 : (x-1)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \Rightarrow 4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$$

Centro:

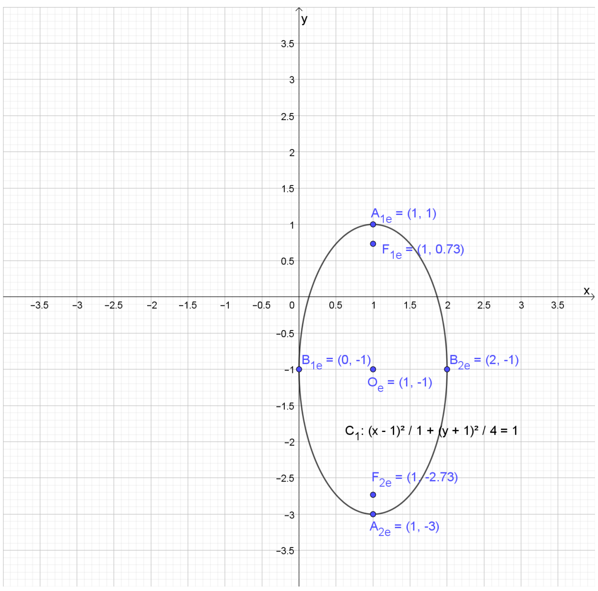
$$O_1 = (1, -1)$$

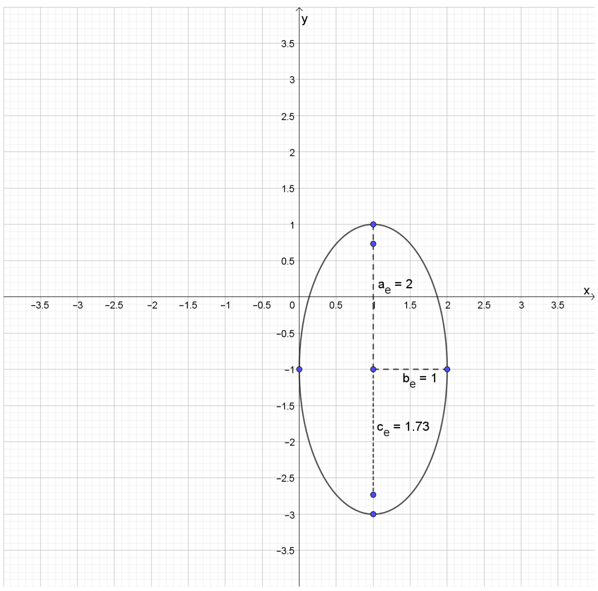
Semi-eixos: $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \therefore \begin{cases} a = \pm 4 \\ b = \pm 1 \end{cases}$

Relação pitagórica:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

Focos: $\begin{cases} F_1 = \left(1, -1 + \sqrt{3}\right) \\ F_2 = \left(1, -1 - \sqrt{3}\right) \end{cases}$





Hipérbole $C_2 : \dfrac{(y-1)^2}{4} - (x+1)^2 = 1 \Rightarrow -4x^2 + y^2 - 8x - 2y - 7 = 0$

Centro:

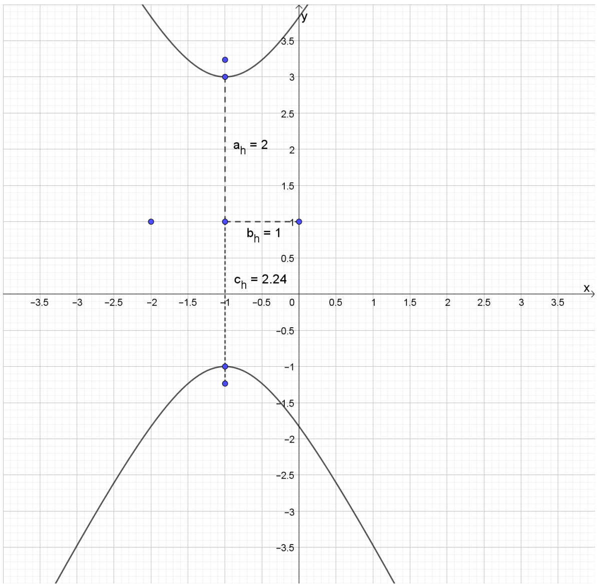
$O_1 = (1, -1)$

Semi-eixos: $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \therefore \begin{cases} a = \pm 4 \\ b = \pm 1 \end{cases}$

Relação pitagórica:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

Focos: $\begin{cases} F_1 = \left(-1, 1 + \sqrt{3}\right) \\ F_2 = \left(-1, 1 - \sqrt{3}\right) \end{cases}$



Parábola $C_3 : y^2 + 3x = 0 \Rightarrow y^2 = -3x$

Equação padrão:

$y^2 = -2px$

Parâmetro:

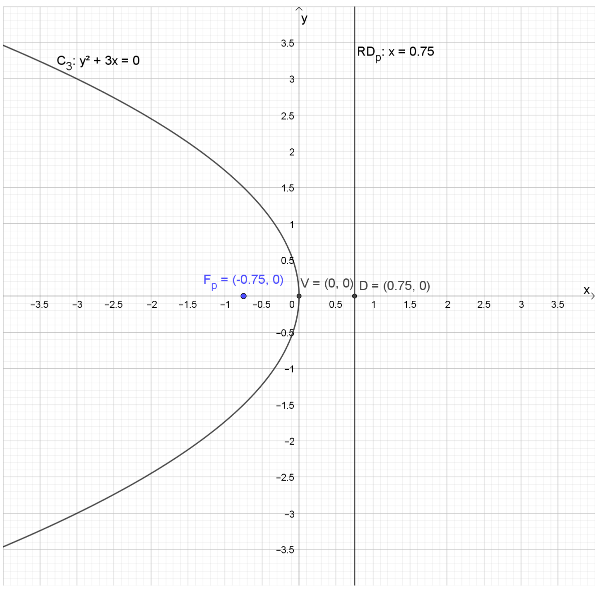
$p = \dfrac{3}{2}$

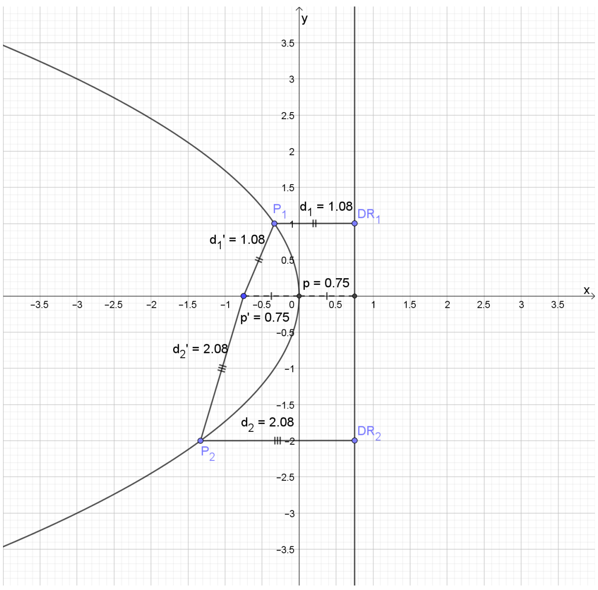
Foco:

$F = \left(-\dfrac{3}{4}, 0\right)$

Reta diretriz:

$x = \dfrac{3}{4}$





Passo 2: Curvas já traçadas

Passo 3: Cálculo dos pontos de intersecção

Elipse e Hipérbole

$$C_1 = C_2$$

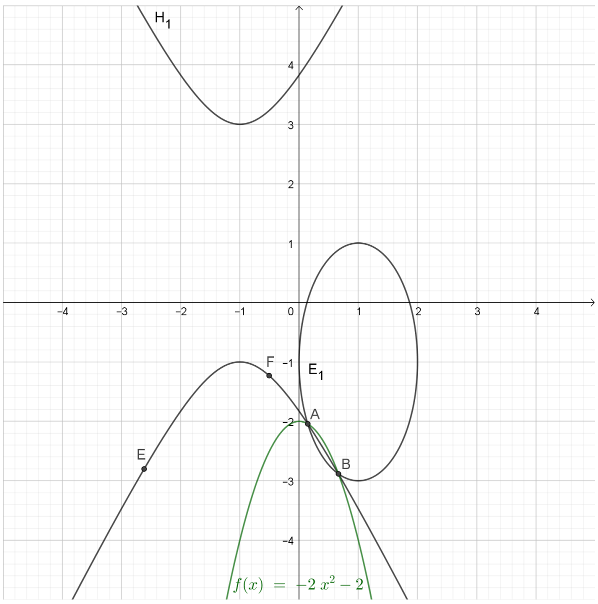
$$4x^2+y^2-8x+2y+1 = -4x^2+y^2-8x-2y-7$$

$$y = -2x^2 - 2$$

$$\Delta_x < 0 \therefore x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$$

Igualando a parábola de intersecção a qualquer uma das curvas, é possível calcular os pontos de intersecção.

A parábola de intersecção é o lugar geométrico (família de pontos) cujos pontos de intersecção pertencem, e apesar de as vezes ser difícil calcula-los, por inspeção é facil mostrar que existem e em que região aproximada estão.



Hipérbole e Parábola

$$C_2 = C_3$$

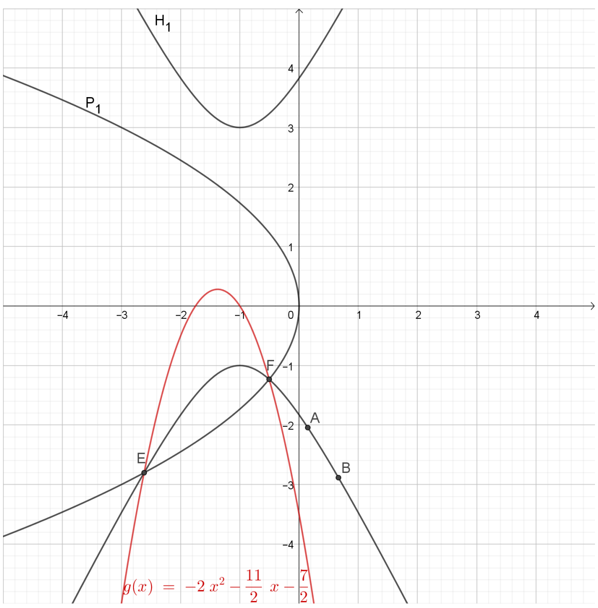
$$-4x^2 + y^2 - 8x - 2y - 7 = y^2 + 3x$$

$$y = \frac{-4x^2 - 11x - 7}{2}$$

$$\Delta_x = \frac{9}{4} \Rightarrow f(x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{7}{4} \\ x_2 = -1 \end{array} \right.$$

Há 2 pontos de intersecção entre a hipérbole e a parábola, e a curva encontrada é o lugar geométrico (família de pontos) que contém esses pontos.

Apesar de ser difícil calculá-los, basta esboçar a curva e encontra-los por inspeção.



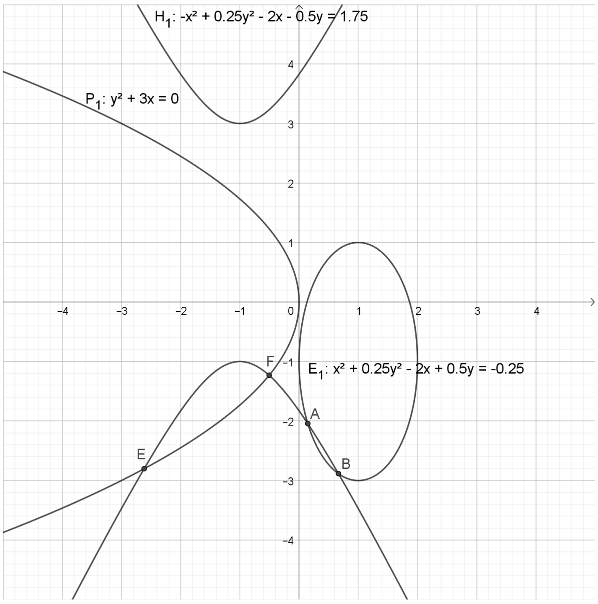
Elipse e Parábola

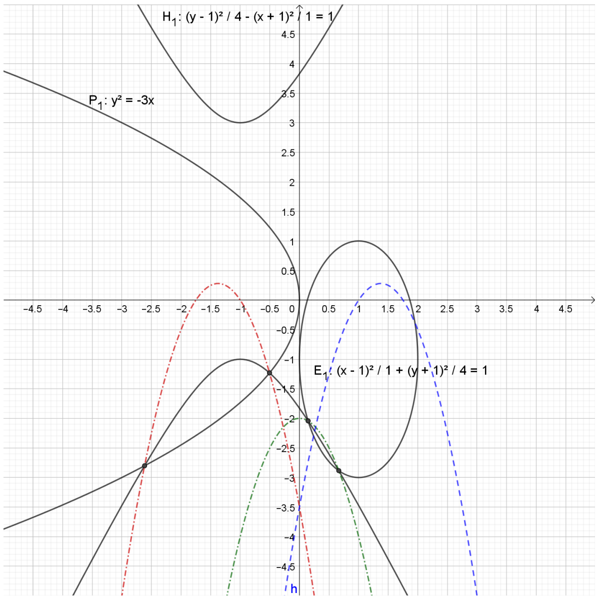
$$C_1 = C_3 \Rightarrow 4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = y^2 + 3x$$

$$y = \frac{-4x^2 + 11x - 1}{2} \Rightarrow \Delta_x = \frac{9}{4} \Rightarrow f(x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{7}{4} \end{array} \right.$$

É possível notar por inspeção que os valores encontrados não satisfazem as equações de cada curva no mesmo ponto, ou ainda, a imagem da elipse e da parábola são diferentes, o que torna a solução absurda. Portanto, não existem pontos de intersecção.

Finalmente, podemos esboçar a solução final com todas as curvas e suas intersecções. Notemos que de fato, a curva de intersecção entre a elipse e a parábola fornecem uma solução absurda.





Questão 5 - Conceitual